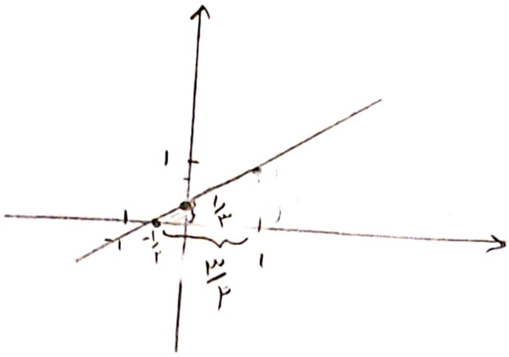
مهتا گلوبچ - پاسخ تشریحی تکلیف شماره ۱۰۰

ج $۲y = ۳x - ۱ \longrightarrow f^{-1}(x) \longrightarrow ۲y + ۱ = ۳x \longrightarrow x = \frac{۲y+۱}{۳} \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{۲x+۱}{۳}$

y



$$\frac{۲x+۱}{۳}\begin{cases} x = ۰ \longrightarrow \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲x+۱}{۳} = ۰ \longrightarrow ۲x = -۱ \longrightarrow x = -\frac{۱}{۲} \\ x = ۱ \longrightarrow y = ۱ \end{cases}$$ ۱

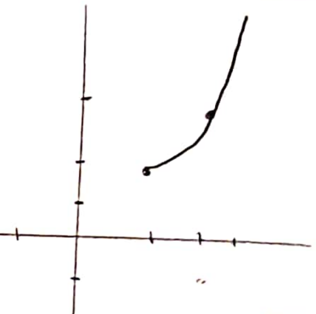
$$S = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}}{۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

الف) $y = x^۲ - ۲x + ۳ \quad , \quad x \in [۱, +\infty) \qquad R_f = [۲, +\infty)$

$x_S = \frac{۲}{۲} = ۱ \quad y_S = ۱ - ۲ + ۳ = ۲ \quad | \quad x = ۲ \quad y = ۴ - ۴ + ۳$

$\Delta = ۴ - ۴(۱)(۳) < ۰ \longrightarrow$ ریشه ندارد

یک به یک ← خط افقی یک بار قطع می کند



۲

$y = x^۲ - ۲x + \underset{\searrow ۱+۲}{۳}$

$(x-۱)^۲ + ۲ = y \longrightarrow y - ۲ = (x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \pm\sqrt{y-۲} = x - ۱ \longrightarrow x = ۱ \pm \sqrt{y-۲}$

$۱ + \sqrt{x-۲} = y \longleftarrow$ بخاطر دامنه را قبول می کنیم $\oplus \longleftarrow y = ۱ \pm \sqrt{x-۲} \hookleftarrow$

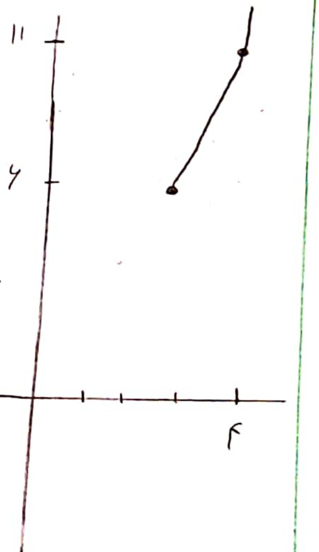
$D_{f^{-1}} = R_f = [۲, +\infty)$

ب) $y = x^۲ - ۲x + ۳ \quad , \quad x \in [۳, +\infty) \qquad R_f = [۶, +\infty)$

$x_S = \frac{۲}{۲} = ۱ \quad y_S = ۱ - ۲ + ۳ = ۲ \;/\; x = ۳ \quad y = ۹ - ۶ + ۳ = ۶$

$\Delta = ۴ - ۴(۱)(۳) < ۰ \longrightarrow$ ریشه ندارد $\qquad x = ۴ \quad y = ۱۶ - ۸ + ۳ = ۱۱$

یک به یک ← خط افقی را یک بار قطع می کند



$y = x^۲ - ۲x + \underset{\searrow +۲+۱}{۳}$

$(x-۱)^۲ + ۲ = y \longrightarrow \pm\sqrt{y-۲} = x - ۱$

$x = ۱ \pm \sqrt{y-۲}$

$y = ۱ + \sqrt{x-۲} \longleftarrow$ قبول $\oplus \longleftarrow y = ۱ \pm \sqrt{x-۲}$

$D_{f^{-1}} = R_f = [۶, +\infty)$

$f(x) = ۲x - \sqrt{\underbrace{۱۶ - ۴x(۴-x)}_{\underset{(۲x-۴)^۲}{۱۶ - ۱۶x + ۴x^۲}}} \longrightarrow ۲x - |۲x - ۴| = f(x)$

$۴x(۴-x) = ۱۶x - ۴x^۲$

$S = \frac{(۲+۱) \times ۴}{۲} = \boxed{۶}$

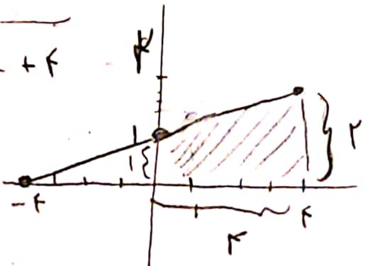
۳

$۲x + ۲x - ۴$	۲	$۲x - ۲x + ۴$
$۴x - ۴$		

$f(x) = ۴x - ۴ = y \longrightarrow D_f = (-\infty, ۲] \quad R_f = (-\infty, ۴]$

$۴x = y + ۴ \longrightarrow x = \frac{y+۴}{۴}$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, ۴] \,,\, f^{-1}(x) = \frac{x+۴}{۴} \longrightarrow \begin{matrix} x = ۰ \longrightarrow y = ۱ \\ x = ۱ \longrightarrow y = \frac{۵}{۴} \end{matrix}$



مهسا کلیجان - پاسخ تشریحی تکلیف شماره ۱۰

۴

$\circled{y}=\dfrac{\circled{x}}{\sqrt{x^{۲}-۵}}\ \oplus \xrightarrow{\text{هم علامت}} x,y$

$\sqrt{x^{۲}-۵} \downarrow\ x^{۲}>۵ \rightarrow \boxed{\begin{matrix}x>۵\\x<-۵\end{matrix}}$

$\text{if}\begin{cases}(x_۱,y)\in f\\(x_۲,y)\in f\end{cases}\rightarrow \dfrac{x_۱}{\sqrt{x_۱^{۲}-۵}}=\dfrac{x_۲}{\sqrt{x_۲^{۲}-۵}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\dfrac{x_۱^{۲}}{x_۱^{۲}-۵}=\dfrac{x_۲^{۲}}{x_۲^{۲}-۵}$

$\cancel{x_۱^{۲}x_۲^{۲}}-۵x_۱^{۲}=\cancel{x_۱^{۲}x_۲^{۲}}-۵x_۲^{۲}$

$x_۱^{۲}=x_۲^{۲}\longrightarrow x_۱=\pm x_۲ \rightarrow$ فقط + قابل قبول چون x و y هم علامت ← یکدیگرند

$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^{۲}-۵}}\rightarrow x=\dfrac{y}{\sqrt{y^{۲}-۵}}\longrightarrow x^{۲}=\dfrac{y^{۲}}{y^{۲}-۵}\rightarrow x^{۲}y^{۲}-۵x^{۲}=y^{۲}\rightarrow x^{۲}y^{۲}-y^{۲}=۳x^{۲}$

$y^{۲}=\dfrac{۳x^{۲}}{x^{۲}-۱}\rightarrow y=\pm\sqrt{\dfrac{۳x^{۲}}{x^{۲}-۱}}\rightarrow y=\dfrac{\sqrt{۳}x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

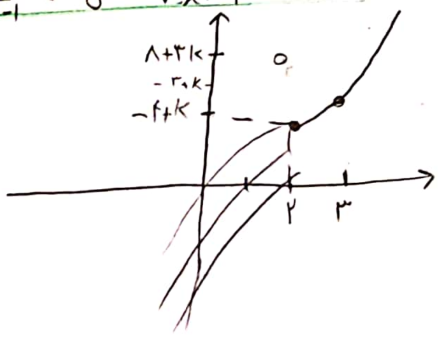
۵

$$g(x)=\begin{cases}x^{۲}-۴x+k & ;\ x\geq ۲\\ ۱-۱\ \checkmark & \\ -x^{۲}+۶x+۳k & ;\ x<۲\\ ۱-۱\ \checkmark & \end{cases}$$

$x^{۲}-۴x+k \longrightarrow \text{ext}\,\Big|^{۲}_{-۴+k}$

$-x^{۲}+۶x+۳k \longrightarrow (۲\ ,\ ۸+۳k)$

$\text{ext}\,\Big|^{۳}_{۹+۳k}$



$۸+۳k\leq -۴+k$

$۲k\leq -۱۲\longrightarrow k\leq -۶$

۶

$f(x)=۳x+|x|$

$g(x)=ax+b|x|$

$ab=?$

$ab=\dfrac{-۳}{۶۴}$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{۰} \\ \hline (a-b)x & (a+b)x \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{۰} \\ \hline ۲x=y & ۴x=y \end{array}$$

$f^{-۱}(x)=\dfrac{x}{۲}\leftarrow ۲x=y$

$۴x=y\rightarrow f^{-۱}(x)=\dfrac{x}{۴}$

$a+b=\dfrac{۱}{۴}$

$a-b=\dfrac{۱}{۲}$

$۲a=\dfrac{۳}{۴}\longrightarrow a=\dfrac{۳}{۸}\ ,\ b=\dfrac{-۱}{۸}$

۷

$f(x)=\dfrac{۳x+۴}{x+m}$

$(+۲,-۱۰)\leftarrow$

$-۱۰=\dfrac{۶+۴}{۲+m}\rightarrow -۲۰-۱۰m=۱۰$

$-۱۰m=۳۰$

$\boxed{m=-۳}$

$f(x)=\dfrac{۳x+۴}{x-۳}\Leftarrow$

$f(۰)=\dfrac{۴}{-۳}=-\dfrac{۴}{۳}$

$y=\underbrace{f\circ f^{-۱}(x)}+f^{-۱}(x)$

$\cancel{x}=\cancel{x}+f^{-۱}(x)$

$f^{-۱}(x)=۰\rightarrow f(۰)=?\rightarrow -\dfrac{۴}{۳}$

$x=-\dfrac{۴}{۳}$

نیمساز ناحیه اول و سوم $\Rightarrow y=x$

۸

f و g وارون پذیر

$f(\underbrace{۳-\cancel{۲x}}_{a})=۲-g(\underbrace{\circled{\tfrac{x}{۲}}}_{b})=-۴$

$-۲\longleftarrow$

$۴g^{-۱}(۴)+f^{-۱}(-۲)$

$f(a)=-۲\longrightarrow f^{-۱}(-۲)=a$

$g(b)=۴\longrightarrow g^{-۱}(۴)=b$

$۴b+a\Rightarrow ۴(\dfrac{x}{۲})-۲x+۳=۲x-۲x+۳=\boxed{۳}$

$$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x}\xrightarrow[\text{به محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت}}-y=\frac{-۵x-۱۳}{x+۱}\longrightarrow y=\frac{۵x+۱۳}{x+۱}$$

۹

$$y=\frac{۵(x-۲)+۱۳}{(x-۲)+۱}\longrightarrow y=\frac{۵x+۳}{x-۱}\longrightarrow y=\frac{۵x+۳}{x-۱}-۳$$

$$\to y=\frac{۵x+۳-۳x+۳}{x-۱}=\frac{۲x+۶}{x-۱}=f(x)$$

$$y=\frac{۲x+۶}{x-۱}\longrightarrow x=\frac{۲y+۶}{y-۱}\longrightarrow y=-\frac{-x-۶}{x-۲}\longrightarrow y=\frac{x+۶}{x-۲}=f^{-1}(x)$$

$$f(x)=f^{-1}(x)\qquad \frac{۲x+۶}{x-۱}=\frac{x+۶}{x-۲}\longrightarrow \begin{matrix}x^۲-۳x-۶=۰\\ x^۲-Sx+P=۰\end{matrix}\longrightarrow S=۳$$

۱۰

$$f(x)=x+۴[x]\xrightarrow[\text{(وارون)}]{\text{قرینه نسبت به } y=x}$$

$$f(x)=x+۴[x]\to y=x+۴[x]$$

$$x=y+۴[y]$$

$$y=x-۴[y]\leftarrow \text{حالا}$$

[y] برحسب x محاسبه می‌کنیم

$$g(x)=y=x-\frac{۴[x]}{۵}$$

از کل عبارت [ ] →

$$x=y+۴[y]$$

$$[x]=[y+۴[y]]$$

$$[x]=[y]+۴[y]=۵[y]$$

$$[y]=\frac{[x]}{۵}\to ۴[y]=\frac{۴[x]}{۵}$$

$$\text{ضابطه}\quad (f-g)(x)=f(x)-g(x)=\cancel{x}+۴[x]-\cancel{x}+\frac{۴[x]}{۵}=\frac{۲۰[x]+۴[x]}{۵}$$

$$=\frac{۲۴[x]}{۵}$$

$$D_{f^{-1}}=R_f=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ [۵x,\ ۵x+۱)\}$$