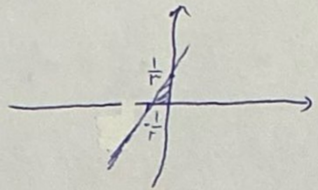
برای کیمیا نیا — مثل هم تو بنویسید! — تکلیف شماره ۲ — ۱۸ — دوازدهم (A)

۲

$2y = 3x - 1 \to y = \frac{3x-1}{2} \to 3y = 3x - 1 \to x = \frac{2y+1}{3} \to y = \frac{2x+1}{3} \to$ 1

$\to y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \to$



مساحت $= \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}$

۲

الف) $y = x^2 - 2x + 3$, $x \in [1, +\infty) \to -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \to$ یک به یک است

$y = (x-1)^2 + 2 \to |x-1| = \sqrt{y-2} \to \begin{cases} x = \sqrt{y-2} + 1 \\ x = 1 - \sqrt{y-2} \to y = 1 - \sqrt{x-2} \to \end{cases}$ 2

$\to y = 1 \pm \sqrt{x-2} \to \begin{cases} D_f = R_{f^{-1}} \to [1, +\infty) \\ R_f = D_{f^{-1}} \to [2, +\infty) \end{cases} \to y = 1 + \sqrt{x-2}$

ب) $y = x^2 - 2x + 3$, $x \in [3, +\infty) \to -\frac{b}{2a} = 1$

$y = (x-1)^2 + 2 \to \sqrt{y-2} = |x-1| \to y = 1 \pm \sqrt{x-2} \to D_f = R_{f^{-1}} \xrightarrow{\text{باید}} R_{f^{-1}} \geq 3 \to$

$\to y = 1 + \sqrt{x-2}$ $x \in [4, +\infty)$

---

۳ $\frac{0}{1}$

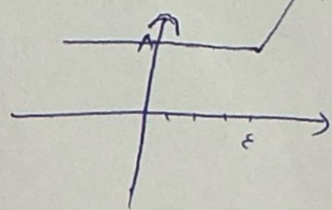
$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{4(4-x)^2} = 2x - |2(4-x)| = 2x - |8 - 2x|$

نمیتونی فاکتور بگیری

$\begin{cases} 2x - (8 - 2x) = 2x - 8 + 2x = 4x - 8 & x \leq 4 \\ 2x - (2x - 8) = 2x - 2x + 8 = 8 & x > 4 \end{cases}$

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2}$

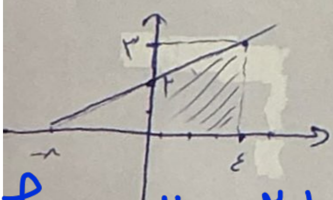
$4(x^2 - 4x + 4)$



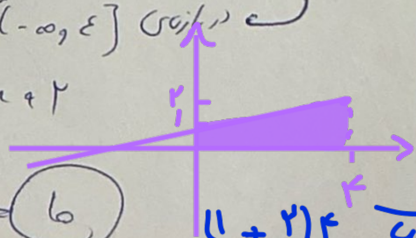
در بازه $(-\infty, 4]$ یک به یک است

ادامه

$y = 4x - 8 \to x = \frac{y+8}{4} \to y = \frac{x+8}{4} \to y = \frac{1}{4}x + 2$



$\frac{(\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک}) \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{2+3}{2} \times 4 = 10$



$\boxed{\frac{(1+2)4}{2} = 6}$

$f(x) = 2x - 2|x-2|$ $\to x > 2 \to 4$; $x \leq 2 \to 4x - 4$

$\to f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + 1$

$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$

(۲)

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \longrightarrow f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \xrightarrow[\text{صورت دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}]{\text{با توجه به هم علامت بودن}}$$

$$\longrightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5} \to x_1^2x_2^2-5x_1^2=x_1^2x_2^2-5x_2^2 \to x_1^2=x_2^2 \to x_1=\pm x_2$$ ۴

از آنجایی که تساوی برقرار نمی‌کند دو x مختلف‌العلامت داخل باشد در به توان ۲ رساندن اشتباه رخ داده و این تابع یک به یک است

$$f^{-1} \to y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \to x=\frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \to x^2=\frac{y^2}{y^2-5} \to y^2x^2-5x^2=y^2 \to$$

$$\to y^2x^2-y^2=5x^2 \to y^2=\frac{5x^2}{x^2-1} \to y=\pm\sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}} \xrightarrow[\text{علامت}]{\text{با توجه به هم}} y=\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$$ ✓

(۲)

$$g(x)=\begin{cases} x^2-4x+k & x\geq 2 \to x=2 \to k-4 \\ -x^2+6x+3k & x<2 \to x=2 \to 8+3k \end{cases} \to 8+3k\leq k-4 \to k\leq -6$$ ✓ ۵

(۳)

$$f(x)=3x+|x| \xrightarrow{f^{-1}(x)} g(x)=ax+b|x|$$

$$f(x)=\begin{cases} 4x & x\geq 0 \to y=4x \to x=\frac{y}{4} \to y=\frac{1}{4}x \\ 2x & x<0 \to y=2x \to x=\frac{y}{2} \to y=\frac{1}{2}x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{8} \\ \dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{8} \end{cases}$$ ۶

$$g(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}x \begin{cases} a=\frac{3}{8} \\ b=\frac{-1}{8} \end{cases} \longrightarrow ab=\frac{3}{8}\times\left(\frac{-1}{8}\right)=\frac{-3}{64}$$ ✓

$f(x)=\dfrac{3x+4}{x+m} \xrightarrow{(2,-10)} -10=\dfrac{10}{2+m} \to -20-10m=10 \to 10m=-30 \to m=-3$

$f(x)=\dfrac{3x+4}{x-3} \to y=f\circ f^{-1}(x)+f^{-1}(x)$ ②

$\to f\circ f^{-1}(x)=x$

$\to f^{-1}(x) \xrightarrow[\text{خودش با معکوسش برابر است}]{a+d=0} \dfrac{3x+4}{x-3}$

$y=f\circ f^{-1}(x)+f^{-1}(x)=x+\dfrac{3x+4}{x-3} \to \dfrac{x^2-3x+3x+4}{x-3}=\dfrac{x^2+4}{x-3} \xrightarrow{y=x}$

$\to \dfrac{x^2+4}{x-3}=x \to x^2-3x=x^2+4 \to -3x=4 \to x=-\dfrac{4}{3}$

$f(3-2x)=2-g(\frac{x}{2})$ $\qquad 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=?$ ② ۸

$f(3-2x)=t \to f^{-1}(t)=3-2x \to t+g(\frac{x}{2})=2 \to g(\frac{x}{2})=2-t \longrightarrow$

$\to g^{-1}(2-t)=\frac{x}{2} \to x=2g^{-1}(2-t)$

$x=2g^{-1}(2-t)$

$x=\dfrac{3-f^{-1}(t)}{2} \longrightarrow 2g^{-1}(2-t)=\dfrac{3-f^{-1}(t)}{2} \to 4g^{-1}(2-t)=3-f^{-1}(t) \to$

$\longrightarrow 4g^{-1}(2-t)+f^{-1}(t)=3 \xrightarrow{t=-2} 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=3$

$y=\dfrac{5x-13}{1-x} \xrightarrow[(-x,-y)]{\text{قرینه نسبت به مبدا مختصات}} y=\dfrac{-5x-13}{x+1} \to -y=\dfrac{-5x-13}{1+x} \xrightarrow{\times(-1)} y=\dfrac{5x+13}{x+1}$ ۹

دو واحد به سمت راست: $x\to x-2$

$\dfrac{5(x-2)+13}{1+(x-2)}=\dfrac{5x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}} \dfrac{5x+3}{x-1}-3=f(x) \to f(x)=\dfrac{2x+6}{x-1}$ ②

$yx-y=2x+6 \to yx-2x=y+6 \to x(y-2)=y+6 \to x=\dfrac{y+6}{y-2} \to y=\dfrac{x+6}{x-2}=f^{-1}(x)$

$f(x)=f^{-1}(x) \to \dfrac{2x+6}{x-1}=\dfrac{x+6}{x-2} \longrightarrow 2x^2+2x-12=x^2+5x-6 \to x^2-3x-6=0$

$S=\dfrac{-b}{a}=3$

(A) دوازدهم — تکلیف شمارهٔ ۱ — پریا اکرام نیا

۲

$$f(x) = x + 4[x] \xrightarrow[\text{یعنی وارون}]{\text{قرینه نسبت به } y=x} g(x) \qquad (f-g)(x) = ?$$

$$\hookrightarrow x = y + 4[y] \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین براکت}} [x] = [y + 4[y]] \to [x] = 5[y] \to [y] = \frac{[x]}{5}$$

$$\hookrightarrow y = x - 4[y]$$

$$y = x - 4[y] \to y = x - 4\left(\frac{[x]}{5}\right) \to y = x - \frac{4[x]}{5} \Rightarrow g(x) = x - \frac{4[x]}{5}$$

$$(f-g)(x) = x + 4[x] - x + \frac{4}{5}[x] \Rightarrow \frac{24}{5}[x]$$