

(۲)

۱-

(الف)

$$f(x) = x + [x]$$

$$y = x + [x] \xrightarrow{\text{از طرفین منهای } [x]} [y] = [x + [x]] \rightarrow [y] = x$$

$$[x] = \frac{[y]}{1}$$

$$y = x + \frac{[y]}{1} \rightarrow x = y - \frac{[y]}{1} \Rightarrow y = x - \frac{[x]}{1} \rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{1}$$

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

$$x + [x] = x - \frac{[x]}{1} \rightarrow [x] = -\frac{[x]}{1} \rightarrow 2[x] = 0$$

$$2[x] = 0 \Rightarrow x \in [0, 1) \Rightarrow \text{یا } x = 0 \text{ یا } x = 1 \text{ فقط بر خیزد} \checkmark$$

(ب)

$$f(f^{-1}(x)) = 2x - \frac{x}{1}$$

$$x \in 2x - \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{x}{1} \Rightarrow x = 0$$

است $x = \frac{x}{1}$ غلط است و در نتیجه $x = 0$ تنها جواب است

(۲) ۲-

$$y = \frac{ax + 1}{x + b} \quad f \circ f(\omega - \sqrt{4})$$

$$y = \frac{ax + 1}{x + b} \xrightarrow{\text{از طرفین ضرب در } x + b} y(x + b) = ax + 1$$

$$yx + by = ax + 1 \xrightarrow{\text{از طرفین منهای } ax + by} (y - a)x = 1 - by$$

$$x = \frac{1 - by}{y - a} \xrightarrow{\text{از طرفین ضرب در } y - a} x(y - a) = 1 - by$$

$$y = \frac{ax + 1}{x + b} \rightarrow a + b = 0 \rightarrow f(x) = f^{-1}(x)$$

$$f(f(\omega - \sqrt{4})) = f(f^{-1}(\omega - \sqrt{4})) = \omega - \sqrt{4} \checkmark$$

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x + m + 1}$$

۳- کل عالم بر خود f با f^{-1} است یعنی

(۲)

$$f(x) = f^{-1}(x) \quad , \quad f(B) = f^{-1}(B)$$

$$\frac{mx + 1}{x + m + 1} = x \Rightarrow mx + 1 = x^2 + mx + 1x \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{3}{p} = \frac{-1}{-1} = 1 \checkmark$$

$$f(x) = \sqrt{(rx+d)^r} - \sqrt{(ax-r)^r}$$

(r) -r

$$y = |rx+d| - |ax-r|$$

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{-d}{r} & \frac{r}{a} & \\ \hline -rx+d+ax-r & rx+d+ax-r & rx+d-ax+r \\ \hline rx+r & rx+r & -rx+r \end{array}$$

$$y = -rx + v$$

$$x = -\frac{y}{r} + v$$

$$x - v = -\frac{y}{r}$$

$$v - x = \frac{y}{r}$$

$$y = \frac{v-x}{r} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{v-x}{r}$$

$$g(x) = rf(rx) - 1$$

$$g^{-1}(x) = a f^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right) + d \Rightarrow \frac{ac+d}{rb} = ?$$

$$g(x) = t \rightarrow g^{-1}(t) = x \text{ (I)}$$

$$rf(rx) - 1 = t \rightarrow rf(rx) = t+1 \text{ (II)}$$

$$f(rx) = \frac{t+1}{r} \rightarrow f^{-1}\left(\frac{t+1}{r}\right) = rx \rightarrow x = \frac{1}{r} f^{-1}\left(\frac{t+1}{r}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{(II), (I)}} g^{-1}(t) = \underbrace{\left(\frac{1}{r}\right)}_a f^{-1}\left(\underbrace{\frac{t+1}{r}}_c\right) + \underbrace{0}_d \Rightarrow \frac{\frac{1}{r} \times r + 0}{r(1)} = \frac{\frac{r}{r}}{r} = \frac{1}{r}$$

$$f(x) = x + r\sqrt{x} \rightarrow D_f: x \geq 0$$

$$R_f: [0, +\infty)$$

$$y = x + r\sqrt{x} + 1 - 1$$

$$y = (\sqrt{x} + 1)^r - 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y} + 1)^r - 1$$

$$x + 1 = (\sqrt{y} + 1)^r$$

$$\pm \sqrt{x+1} = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow \sqrt{y} = \pm \sqrt{x+1} - 1$$

$$y = (\pm \sqrt{x+1} - 1)^r \quad D_f = R_{f^{-1}}: x \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^r$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$

کل مرغورد تابع دارد پس f نیکوار است $\Rightarrow$ تابع معکوس دارد است $\Rightarrow$ f^{-1} (۲)

$$f(a) = f^{-1}(a) \Rightarrow a - 1 + 2^a = a \Rightarrow 2^a = 1 \Rightarrow 2^a = 2^0 \Rightarrow a = 0 \checkmark$$

$$f(a) = a^3 + 4a$$

$$g = \sqrt{f^{-1}(a) - a}$$

(۲) - ۱

تابع f معکوس است

$$f^{-1}(a) - a \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(a) \geq a$$

$$f(f^{-1}(a)) \leq f(a)$$

از فرض f میسریم:

$$a \leq f(a) \Rightarrow f(a) \leq a$$

$$a^3 + 4a \leq a \Rightarrow a^3 + 3a \leq 0 \Rightarrow a(a^2 + 3) \leq 0 \Rightarrow$$

$$a \leq 0 \Rightarrow a \in (-\infty, 0] \checkmark$$

همواره برقرار است

این بازه سائل یک عدد صحیح اضافه است یعنی f ✓

$$f(a) = -a + \sqrt{a+1} \quad a \geq -1$$

(۲) ۱

$$f^{-1}(a) = \dots \xrightarrow{+4} f^{-1}(a+4) = g(a)$$

$$g(a) = a - 4 \Rightarrow f^{-1}(a+4) = a - 4$$

از فرض f میسریم:

$$a+4 = f(a-4)$$

$$a+4 = -(a-4) + \sqrt{a+1} \Rightarrow 2a+1 = \sqrt{a+1} \quad * 2a+1 \geq 0$$

$$a \geq -\frac{1}{2}$$

$$(2a+1)^2 = a+1 \Rightarrow 4a^2 + 4a + 1 = a+1$$

$$4a^2 + 3a = 0 \Rightarrow a(4a+3) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=0 \checkmark \\ a = -\frac{3}{4} \times \end{array} \right\}$$

پس دو تابع تنها یک نقطه برخورد دارند $\leftarrow$ ✓

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = r$$

$$\Rightarrow f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f \circ f(x) = f(f^{-1}(x))$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{y} + \sqrt{x} = r$$

$$D_f = [0, K], R_f = [0, K] = x$$

