

-۱

$$f(x) = x + [x]$$

(الف)

$$y = x + [x] \xrightarrow{\text{از طرفین } [x] \text{ کم کنیم}} [y] = [x + [x]] \rightarrow [y] = x + [x]$$

$$[x] = \frac{[y]}{2}$$

$$y = x + \frac{[y]}{2} \rightarrow x = y - \frac{[y]}{2} \Rightarrow y = x - \frac{[x]}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{2}$$

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

$$x + [x] = x - \frac{[x]}{2} \rightarrow [x] = -\frac{[x]}{2} \rightarrow 2[x] = -[x]$$

$$3[x] = 0 \Rightarrow x \in [0, 1) \Rightarrow \text{با هم، فقط یک مورد}$$

(ب)

$$f(f^{-1}(x)) = 2x - \frac{x}{2}$$

$$x = 2x - \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 0$$

است  $x = \frac{x}{2}$  غلط است و در نتیجه، می‌توانیم بگوییم جواب است

$\{x \mid x \in [2k, 2k+1), k \in \mathbb{Z}\}$

$$y = \frac{ax + 1}{4x + b} \quad f \circ f(\omega - \sqrt{4})$$

-۲

$$\begin{cases} \text{از طرفین } y \text{ ضرب کنیم: } y = \frac{-b}{4} \\ \text{از طرفین } x \text{ ضرب کنیم: } x = \frac{a}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{در معادله اول } x \text{ را جایگزین کنیم}} \frac{-b}{4} = \frac{a}{4} \rightarrow a = -b$$

$$y = \frac{ax + 1}{4x + b} \rightarrow a + b = 0 \rightarrow a = -b$$

$$f(f(\omega - \sqrt{4})) = f(f^{-1}(\omega - \sqrt{4})) = \omega - \sqrt{4}$$

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x + m + 1}$$

-۳. برای هر عدد حقیقی  $\alpha$  و  $\beta$  است که

$$f(\alpha) = f^{-1}(\alpha), \quad f(\beta) = f^{-1}(\beta)$$

$$\frac{mx + 1}{x + m + 1} = x \Rightarrow mx + 1 = x^2 + mx + 1x \Rightarrow x^2 + 1x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{3}{p} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$f(x) = \sqrt{(rx+d)^r} - \sqrt{(ax-r)^r}$$

$$y = |rx+d| - |ax-r|$$

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{-d}{r} & \frac{1}{a} & \\ \hline -rx+d+ax-r & rx+d+ax-r & rx+d-ax+r \\ \hline rx+r & rx+r & -rx+r \end{array}$$

$$y = -rx + v$$

$$x = -\frac{y}{r} + v$$

$$x - v = -\frac{y}{r}$$

$$v - x = \frac{y}{r}$$

$$y = \frac{v-x}{r} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{v-x}{r}$$

$$g(x) = rf(rx) - 1$$

$$g^{-1}(x) = a f^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right) + d \Rightarrow \frac{ac+d}{rb} = ?$$

$$g(x) = t \Rightarrow g^{-1}(t) = x \quad (I)$$

$$rf(rx) - 1 = t \Rightarrow rf(rx) = t+1 \quad (II)$$

$$f(rx) = \frac{t+1}{r} \rightarrow f^{-1}\left(\frac{t+1}{r}\right) = rx \rightarrow x = \frac{1}{r} f^{-1}\left(\frac{t+1}{r}\right)$$

$$(II), (I) \rightarrow g^{-1}(t) = \underbrace{\left(\frac{1}{r}\right)}_a f^{-1}\left(\underbrace{\frac{t+1}{r}}_c\right) + \underbrace{0}_d \Rightarrow \frac{\frac{1}{r} \times r + 0}{r(1)} = \frac{\frac{1}{r}}{r} = \frac{1}{r^2}$$

$$f(x) = x + r\sqrt{x} \rightarrow D_f: x \geq 0$$

$$R_f: [0, +\infty)$$

$$y = x + r\sqrt{x} + 1 - 1$$

$$y = (\sqrt{x} + 1)^r - 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y} + 1)^r - 1$$

$$x + 1 = (\sqrt{y} + 1)^r$$

$$\pm \sqrt{x+1} = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow \sqrt{y} = \pm \sqrt{x+1} - 1$$

$$y = (\pm \sqrt{x+1} - 1)^r \quad D_f = R_{f^{-1}}: x \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^r$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$



حل خود تابع را داریم پس می‌توانیم از آن استفاده کنیم  $\Rightarrow$  تابع معکوس را پیدا می‌کنیم

$$f(a) = f^{-1}(a) \Rightarrow a - 1 + 2^a = a \Rightarrow 2^a = 1 \Rightarrow 2^a = 2^0 \Rightarrow a = 0$$

$$f(a) = a^3 + 4a$$

$$g = \sqrt{f^{-1}(a) - a}$$

تابع معکوس را پیدا می‌کنیم

$$f^{-1}(a) - a \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(a) \geq a$$

$$f(f^{-1}(a)) \leq f(a)$$

از فرض  $f$  می‌گیریم:

$$a \leq f(a) \Rightarrow f(a) \leq a$$

$$a^3 + 4a \leq a \Rightarrow a^3 + 3a \leq 0 \Rightarrow a(a^2 + 3) \leq 0 \Rightarrow$$

$$a \leq 0 \Rightarrow a \in (-\infty, 0]$$

همواره برقرار است

پس این بازه شامل یک عدد صحیح منفی است یعنی  $-1$

$$f(a) = -a + \sqrt{a+1} \quad a \geq -1$$

$$f^{-1}(a) = \frac{a+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(a+1) = g(a)$$

$$g(a) = a - 1 \Rightarrow f^{-1}(a+1) = a - 1$$

از فرض  $f$  می‌گیریم:

$$a+1 = f(a-1)$$

$$a+1 = -(a-1) + \sqrt{a+1} \Rightarrow 2a+1 = \sqrt{a+1} \quad * 2a+1 \geq 0$$

$$a \geq -\frac{1}{2}$$

$$(2a+1)^2 = a+1 \Rightarrow 4a^2 + 4a + 1 = a+1$$

$$4a^2 + 3a = 0 \Rightarrow a(4a+3) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \checkmark$$

$$a = -\frac{3}{4} \quad \leftarrow \text{پس دو تابع تنها یک نقطه برخورد دارند}$$

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = r$$

$$\Rightarrow f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f \circ f(x) = f(f^{-1}(x))$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{y} + \sqrt{x} = r$$

$$D_f = [0, K], R_f = [0, K] = x$$

