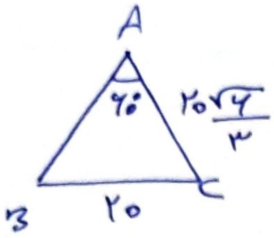
حسابانی ـ ۱۲ دختر A ۱۴

①



$B+C=۱۲۰$

$A+B+C=۱۸۰$

$A=۶۰°$

$\frac{۲۰}{\sin A}=\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳\sin B} \rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{۶}}{۳}\sin A$

$\sin A=\sin ۶۰°=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\sin B=\frac{\sqrt{۶}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

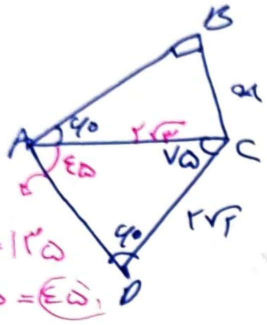
با $\sin B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $B=۴۵°$

$B+C=۱۲۰ \begin{cases} B=۴۵° ✓ \\ C=۷۵° ✓ \end{cases}$

۲

---

②



$۶۰+۷۵=۱۳۵$

$۱۸۰-۱۳۵=۴۵$

$\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin ۴۵}=\frac{AC}{\sin ۶۰}$ $\frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{۱}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$ $AC=۲\sqrt{۳}$

$a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۲\sqrt{۳}=\boxed{۳}$ ✓

ضلع روبه روی ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است ←

۲

---

③ ۵

$\frac{c}{\sin C}=\frac{b^۲-۲}{\sin B}$ $\frac{\sin \hat{B}}{b}=\frac{\sin \hat{C}}{c}=k \rightarrow \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}=\frac{c}{b}$

$(b^۲-۲)\frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}=(b^۲-۲)\frac{c}{b} \xrightarrow[b\neq ۰]{c\neq ۰} (b^۲-۲)\frac{c}{b}=c$

$\frac{(b^۲-۲)}{b}=۱ \rightarrow b^۲-b-۲=۰ \rightarrow (b-۲)(b+۱)=۰ \xrightarrow{b>۰} \boxed{b=۲}$

---

④

$b^۲=c^۲+a^۲-۲ac\cos B$ $۱۶۹=۴۰۰+۴۴۱-۸۴۰\cos B$ $۸۴۰\cos B=۶۷۲$

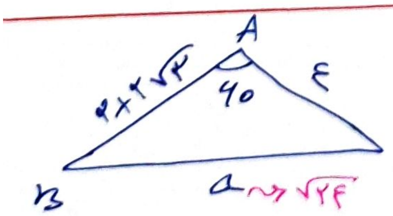
$\cos B=\frac{۶۷۲}{۸۴۰}=\frac{۱۶۸}{۲۱۰}=\frac{۲۴}{۳۰}=\frac{۸}{۱۰}\rightarrow\frac{۴}{۵}$ ✓ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ $\sin^۲B=۱-\cos^۲B$

$\sin^۲B=۱-\frac{۱۶}{۲۵}\rightarrow\frac{۹}{۲۵}$ $\boxed{\sin B=\frac{۳}{۵}}$ ✓

۲

---

⑤ الف)



$a^۲=۴^۲+(۲+۲\sqrt{۳})^۲-۲(۴)(۲+۲\sqrt{۳})\cos ۶۰°$

$a^۲=۱۶+۴+۱۲+۸\sqrt{۳}-(۱۶-۱۶\sqrt{۳})\times\frac{۱}{۲}$

$a^۲=۳۲+\cancel{۸\sqrt{۳}}-۸-\cancel{۸\sqrt{۳}}$ $a^۲=۲۴$ $\boxed{a=\sqrt{۲۴}}$ ✓

۲

ب)

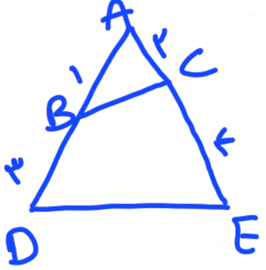
$\frac{\sqrt{۲۴}}{\underset{۶۰}{\sin A}}=\frac{۴}{\sin B}$ $\frac{\sqrt{۲۴}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۴}{\sin B}$ $\frac{\cancel{۴}\sqrt{۲}}{۱}=\frac{\cancel{۴}}{\sin B}$ $\sin B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $B=۴۵°$

$۶۰+۴۵=۱۰۵$

$۱۸۰-۱۰۵=۷۵$

✓ $\boxed{B=۴۵°}$ ✓ $\boxed{C=۷۵°}$

⑥ ⓹



ABC مثلث $\rightarrow$ $۴+۱-۲\times۲\times۱\times \text{Cos}\alpha=۴$

$\text{Cos}\alpha=۱/۴$

$\overset{\Delta}{ADE} = ۶^{۲}+۴^{۲}-۲\times۶\times۴\times۱/۴ = ۳۶+۱۶-۱۲=a^{۲}$

$\boxed{a^{۲}=۴۰ \rightarrow a=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}}$

---

⑦ الف)

$BC=a \quad a^{۲}=۶۴+۲۵-۲(۵)(۸)\cos۶۰$

$a^{۲}=۸۹-۸۰\underbrace{\cos۶۰}_{\frac{۱}{۲}} \quad a^{۲}=۴۹ \quad \boxed{a=۷}$ ✓

۲

ب)

$S=\frac{۱}{۲}\times۵\times۸\times\sin۶۰ \rightarrow ۲۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\boxed{۱۰\sqrt{۳}}$ ✓

---

⑧

$\frac{(b+c)^{۲}-a^{۲}}{bc(\cos A+1)} \rightarrow \frac{b^{۲}+c^{۲}+۲bc-(b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos A)}{bc(\cos A+1)} \quad \frac{\cancel{b^{۲}}+\cancel{c^{۲}}+۲bc-\cancel{b^{۲}}-\cancel{c^{۲}}+۲bc\cos A}{bc(\cos A+1)}$

$\frac{۲bc+۲bc\cos A}{bc(\cos A+1)}=\frac{۲\cancel{bc}(1+\cancel{\cos A})}{\cancel{bc}(1+\cancel{\cos A})}=\boxed{۲}$ ✓

۲

---

⑨

$\frac{a^{۳}+b^{۳}-c^{۳}}{a+b-c}=a^{۲} \rightarrow \frac{((a+b)\cancel{-c})((a+b)^{۲}+c^{۲}+c(a+b))}{\cancel{a+b-c}}=a^{۲}$

$a^{۳}+b^{۳}-c^{۳}=$

⓹

$a^{۲}(a+b-c)=a^{۳}+a^{۲}(b-c) \longrightarrow b^{۳}-c^{۳}=a^{۲}(b-c)$

$a^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+۲ab+c^{۲}+ca+cb$

$\cancel{b^{۲}}+\cancel{c^{۲}}-۲bc\cos A=a^{۲}+\cancel{b^{۲}}+۲ab+\cancel{c^{۲}}+ca+cb$

$\cos A=\frac{۲ab+ca+bc}{-۲bc}$

$(b-c)(b^{۲}+c^{۲}+bc)=a^{۲}(b-c) \rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}+bc$

$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\hat{A}$

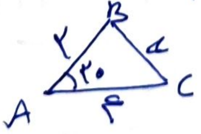
$\cos\hat{A}=-۱/۲ \rightarrow \boxed{\hat{A}=۱۲۰}$

---

⑩

$S=(1+۳\cos\alpha)(۳-\cos\alpha)\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=۲ \qquad ۳-\cos\alpha+۹\cos\alpha-۳\cos\alpha=۸$

$۵\cos\alpha=۵ \rightarrow \cos\alpha=۱$



$a^{۲}=۴+۱۶-۱۶(\cos۳۰)$

۲

$\boxed{a^{۲}=۲۰-۸\sqrt{۳}}$ ✓