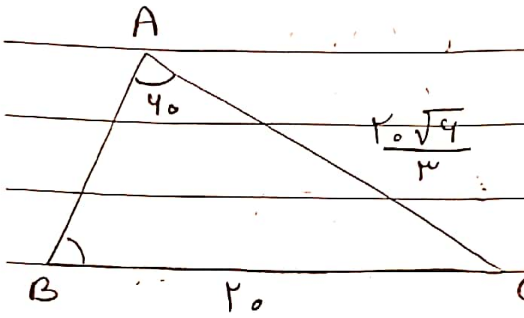
«مبینا هاتف الحسینی»　　　19　　　«دوازدهم دختر A . جمعه»

۱- $\hat B + \hat C = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat A = ۶۰^\circ$



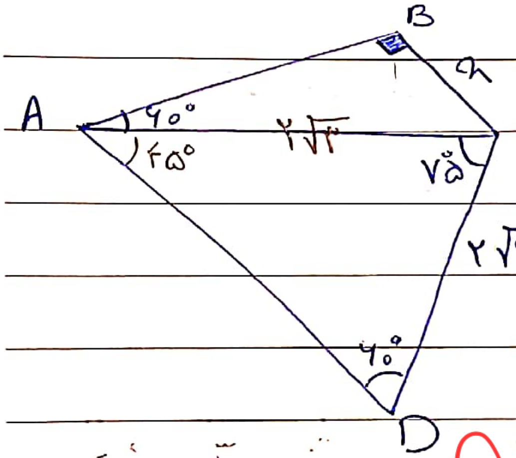
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{۲۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B}$　　②

$\frac{۴۰}{\sqrt{۳}} = \frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳\sin B} \Rightarrow ۳\sin B = \frac{\cancel{۲۰}\sqrt{۶}\times\sqrt{۳}}{\cancel{۴۰}\,۲} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{۱۸}}{۶}$

$\sin B = \frac{۳\sqrt{۲}}{۶} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \xrightarrow{\text{حاده } B} \boxed{\hat B = ۴۵^\circ}$ ✓ $\Rightarrow C = ۱۲۰ - ۴۵ = \boxed{۷۵^\circ}$ ✓

۲-



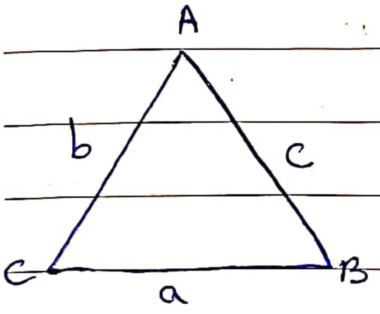
در مثلث $A\hat{D}C$: $\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin ۴۵} = \frac{AC}{\sin ۶۰} \Rightarrow$

$\frac{\frac{۲\cancel{\sqrt{۲}}}{۱}}{\frac{\cancel{\sqrt{۲}}}{۲}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow AC = ۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$

در مثلث $A\hat{B}C$: $\frac{۲\sqrt{۳}}{۱\ \cancel{\sin ۹۰}} = \frac{x}{\cancel{\sin ۶۰}}$
$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\Rightarrow x = ۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳$　　②

$\Rightarrow \boxed{x = ۳}$ ✓

۳-



$(b^۲ - ۲)\frac{\sin\hat C}{\sin\hat B} = C$

$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sin\hat C}{\sin\hat B} = \frac{c}{b}$

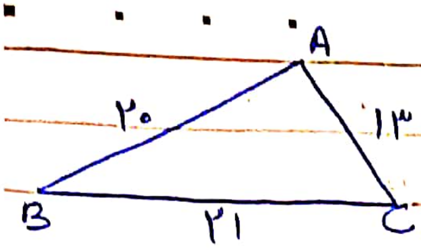
$\Rightarrow (b^۲ - ۲)\times\frac{c}{b} = c \Rightarrow b^۲ - ۲ = b$

$b^۲ - b - ۲ = ۰$　　②

$(b - ۲)(b + ۱) = ۰$

$\begin{cases} \boxed{b = ۲} ✓ \\ b = -۱ ✗ \end{cases}$ ✓

۴-

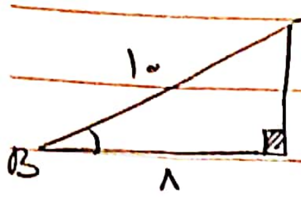


$\sin\hat{B} = ?$

$۱۳^۲ = ۲۰^۲ + ۲۱^۲ - ۲(۲۰)(۲۱)(\cos\hat{B})$

$۱۶۹ = ۴۰۰ + ۴۴۱ - ۸۴۰ \cos\hat{B}$

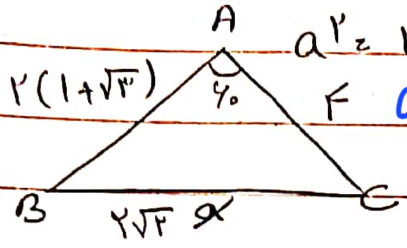
$۸۴۰ \cos B = ۶۷۲ \Rightarrow \cos B = \frac{۸}{۱۰}$ ✓



$\Rightarrow \boxed{\sin B = \frac{۶}{۱۰}}$ ✓

②

۵- (الف



$a^۲ = ۱۶ + ۴(۱+\sqrt{۳})^۲ - \overset{۲}{\cancel{۴}}(۴)(۱+\sqrt{۳}) \times \frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}}$

$a^۲ = (۲+۲\sqrt{۳})^۲ - (۴)^۲ - ۲\times۴\times\frac{۱}{۲}\times(۲+\cancel{۲}\sqrt{۳})$

$a^۲ = ۱۶ + ۴(۴+۲\sqrt{۳}) - ۸(\sqrt{۳}+۳)$

$a^۲ = ۴+۱۲+۸\sqrt{۳}+۱۶-۸-۸\sqrt{۳} \longrightarrow a^۲ = ۲۴$

$a^۲ = ۱۶ + ۱۶ + \cancel{۸\sqrt{۳}} - \cancel{۸\sqrt{۳}} - ۲۴$ $\boxed{a = ۲\sqrt{۶}}$

$\Rightarrow a^۲ = ۳۲ - ۲۴ = ۸ \Rightarrow a = \sqrt{۸} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۲}$

ب)

$۸ + ۴(۴+۲\sqrt{۳}) - ۴(۲\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۳})\cos\hat{B} = ۱۶$

$۸ + \cancel{۱۶} + ۸\sqrt{۳} - ۸\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})\cos\hat{B} = \cancel{۱۶}$

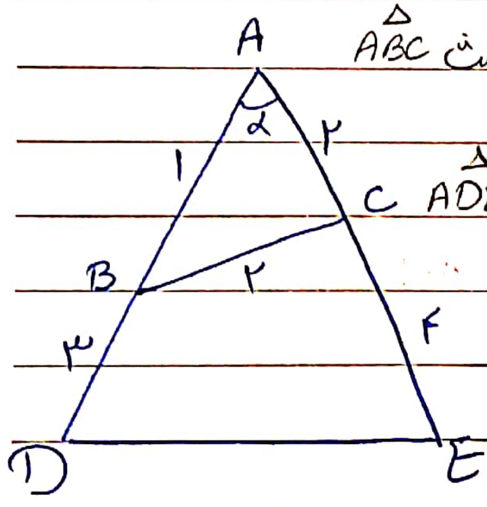
$\cancel{۸} + \cancel{۸}\sqrt{۳} - \cancel{۸}\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})\cos\hat{B} = ۰$

①

$۱ + \cancel{\sqrt{۳}} = \sqrt{۲}(\cancel{۱+\sqrt{۳}})\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \boxed{\hat{B} = ۴۵^\circ}$ ✓

$\Rightarrow \hat{C} = ۱۸۰ - (۱۰۵) = ۷۵^\circ$ ✓

۶-



در مثلث $\overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \cancel{۴} = \cancel{۴} + ۱ - ۲(۲)\cos A$

$۴\cos A = ۱ \Rightarrow \cos A = \frac{۱}{۴}$

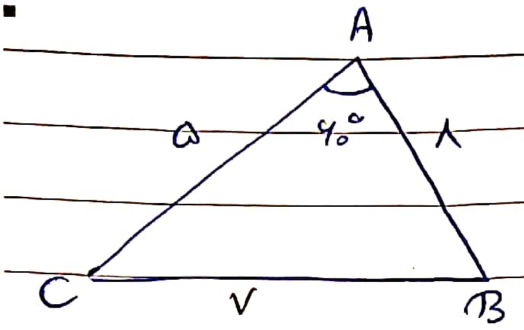
در مثلث $\overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow DE^۲ = ۱۶ + ۳۶ - ۲(\cancel{۴})(۶)\times\frac{۱}{\cancel{۴}}$

$DE^۲ = ۵۲ - ۱۲ = ۴۰ \Rightarrow DE = \sqrt{۴۰} \Rightarrow$

$\boxed{DE = ۲\sqrt{۱۰}}$ ✓

②

۷-



آ) $BC = ?$

$BC^۲ = ۲۵ + ۶۴ - \cancel{۲}(۵)(۸)\cancel{\cos ۶۰}\ \frac{۱}{\cancel{۲}}$

$BC^۲ = ۲۵ + ۶۴ - ۴۰$

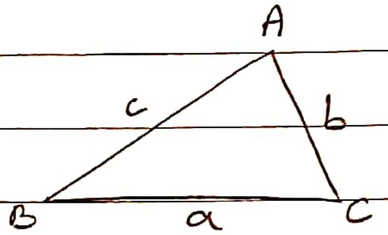
$BC^۲ = ۴۹ \Rightarrow \boxed{BC = ۷}$ ✓

۲

ب) $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ?$

$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{\cancel{۲}} \times ۵ \times \overset{۲}{\cancel{۸}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}} = \boxed{۱۰\sqrt{۳}}$ ✓

۸-



$$\frac{(b+c)^۲ - a^۲}{bc(\cos\hat{A} + ۱)}$$

۲

$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$ ← طبق قضیه کسینوس‌ها

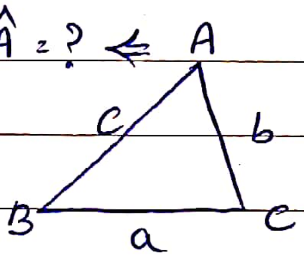
$(b+c)^۲ - a^۲ =$

$\cancel{b^۲} + \cancel{c^۲} + ۲bc - \cancel{b^۲} - \cancel{c^۲} + ۲bc\cos\hat{A} = ۲bc(\cos\hat{A} + ۱)$

$\Rightarrow \frac{۲bc(\cos\hat{A}+۱)}{bc(\cos\hat{A}+۱)} = \boxed{۲}$ ✓

۹-

$\cos\hat{A} = ?$ ←



$$\frac{a^۳ + b^۳ - c^۳}{a + b - c} = a^۲$$

$\cancel{a^۳} + b^۳ - c^۳ = \cancel{a^۳} + a^۲b - a^۲c$

$(\cancel{b-c})(b^۲ + bc + c^۲) = a^۲(\cancel{b-c})$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ + bc$

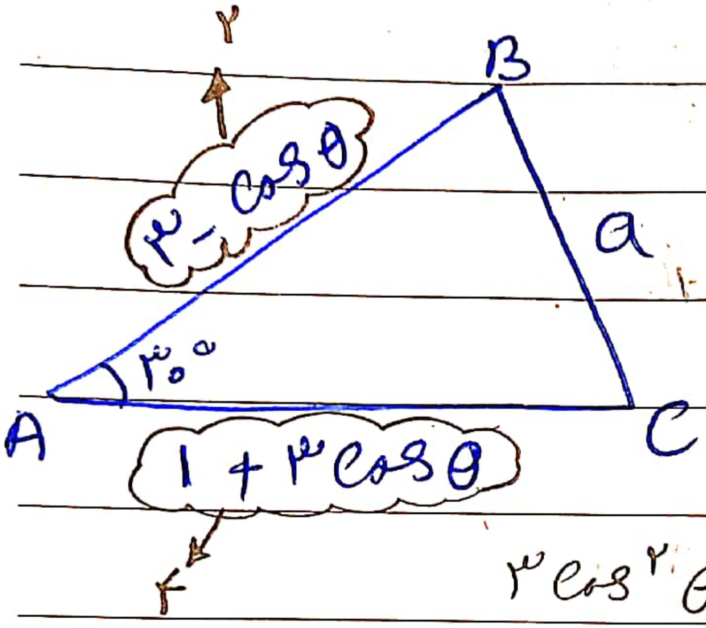
قضیه کسینوس‌ها $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$

$\Rightarrow \boxed{\cos\hat{A} = \frac{-۱}{۲}}$ ✓

$\hat{A} = ۱۲۰°$

۲

۱۰ـ $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۲ \longrightarrow a^{۲} = ?$



$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(۱ + ۳\cos\theta)(۳ - \cos\theta) \times \frac{۱}{۲} = ۲$

$۳ - \cos\theta + ۹\cos\theta - ۳\cos^{۲}\theta = ۸$

$۳\cos^{۲}\theta - ۸\cos\theta + ۵ = ۰$

②

$* \cos^{۲}\theta - ۸\cos\theta + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (\cos\theta - ۳)(\cos\theta - ۵) = ۰$

$\cos\theta = \frac{۳}{۳}$ ✓ $\cos\theta = \frac{۵}{۳}$ ✗

چون $-۱ \leqslant \cos\theta \leqslant ۱$

طبق قضیه کسینوس‌ها:

$a^{۲} = ۱۶ + ۴ - ۲(۴)(۲)\cos ۳۰°$

$a^{۲} = ۲۰ - ۱۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \boxed{a^{۲} = ۲۰ - ۸\sqrt{۳}}$ ✓