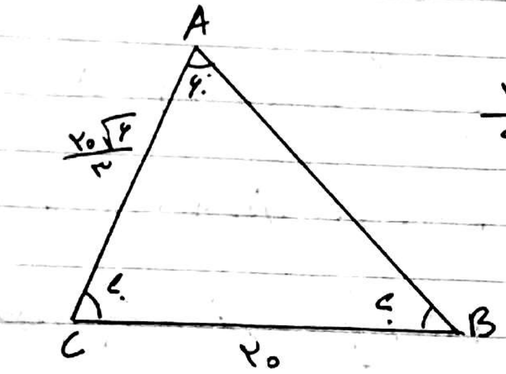
۱)



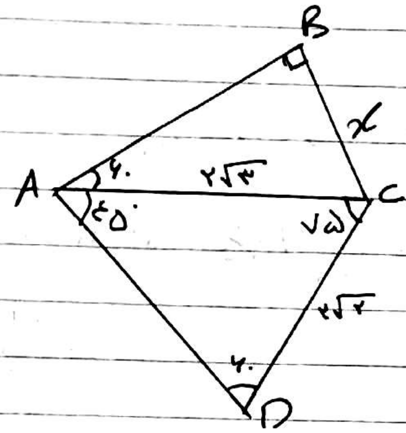
$$\frac{۲۰}{\sin A} = \frac{\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B} \quad , \quad \frac{۲۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow \frac{۴۰\sqrt{۳}}{۳} = \frac{\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}}{\frac{۴۰\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$B = ۴۵^\circ$

$$\hat{B} + \hat{C} = ۱۲۰ \to ۱۲۰ - ۴۵ = \boxed{۷۵^\circ = \hat{C}}$$

۲)



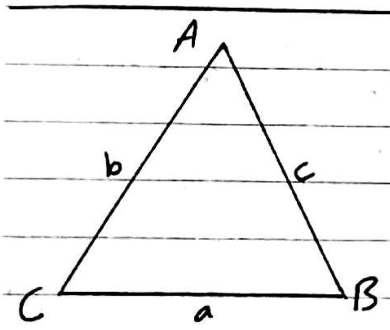
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۴ = \frac{AC}{\sin ۶۰} \to \frac{AC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۴$$

$AC \to ۲\sqrt{۳}$

$$\frac{۲\sqrt{۳}}{۱} = \frac{x}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \to ۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \boxed{x = ۳}$$

۳)



$$(b^۲-۲)\frac{\sin C}{\sin B} = c$$

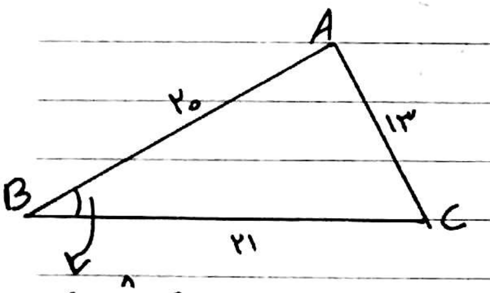
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \to \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$$

$$(b^۲-۲)\frac{\cancel{c}}{b} = \cancel{c} \to \frac{(b^۲-۲)}{b} = ۱ \to (b^۲-۲) = b$$

$b^۲ - b - ۲ = ۰ \to -۱$ غ ق ق

$\to ۲ \checkmark \longrightarrow \boxed{b = ۲}$

۴)



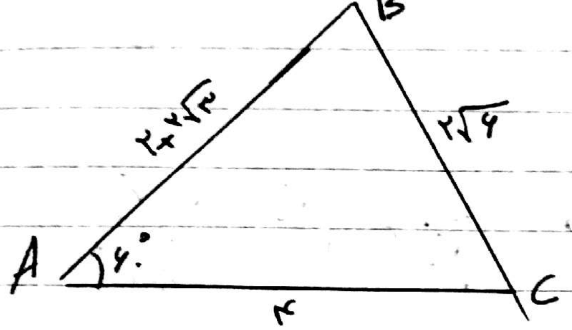
$\sin\hat{B} = ؟$

$$\cos\hat{B} = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} = \frac{۶۷۲}{۸۴۰} = ۰/۸$$

$$\sin^۲ B + \cos^۲ B = ۱ \to ۰/۶۴ + \sin^۲ B = ۱$$

$$\sin^۲ B = ۰/۳۶ \to \boxed{\sin B = ۰/۶}$$

۵)



$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$

$a^۲ = (۲+۲\sqrt{۳})^۲ + ۱۶ - \frac{(۸+۸\sqrt{۳})\times \cancel{۱}}{\cancel{۲}}$

$۴ + ۱۲ + \cancel{۸\sqrt{۳}} + ۱۶ - ۸ - \cancel{۸\sqrt{۳}} =$

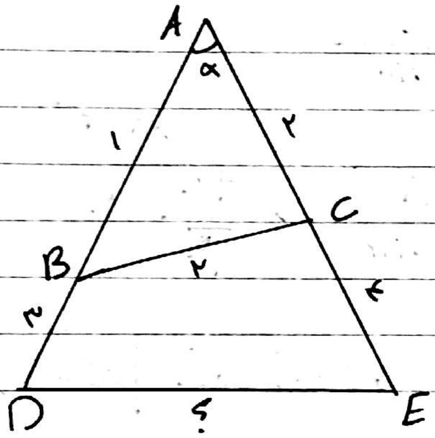
$a^۲ = ۲۴ \to \boxed{a = ۲\sqrt{۶}}$

$\frac{۴}{\sin B} = \frac{۲\sqrt{۶}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \to \frac{۴\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = ۴\sqrt{۲}$

$\frac{۴}{\sin B} = ۴\sqrt{۲} \to \sin B = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \boxed{B = ۴۵^\circ}$ $\boxed{\hat{C} = ۷۵}$

---

۶)



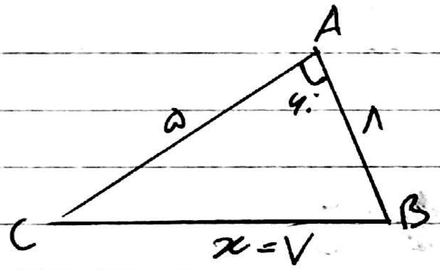
$۴ = ۴ + ۱ - ۴\cos\alpha \to \cos\alpha = \frac{۱}{۴}$

$(DE)^۲ = ۱۶ + ۳۶ - ۲(۴)(۶)\times\frac{۱}{۴} = ۵۲ - ۱۲ = ۴۰$

$DE = \sqrt{۴۰} = \boxed{۲\sqrt{۱۰}}$

---

۷)



$x^۲ = ۲۵ + ۶۴ - ۲(۴۰)(\frac{۱}{۲}) = ۴۹ \to \boxed{x = ۷}$

$S_{A\hat{B}C} = \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \boxed{۱۰\sqrt{۳}}$

---

۸)

$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$

$(b+c)^۲ - a^۲ = b^۲ + c^۲ + ۲bc - b^۲ - c^۲ + ۲bc\cos A$

$\to ۲bc(۱+\cos A) \to \frac{۲bc(۱+\cos A)}{bc(۱+\cos A)} = \boxed{۲}$

۹)

$\cos A = ?$

$$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c} = a^2$$

$$\cancel{a^3}+b^3-c^3 = \cancel{a^3}+a^2(b-c) \rightarrow \cancel{(b-c)}(b^2+c^2+bc) = a^2\cancel{(b-c)}$$

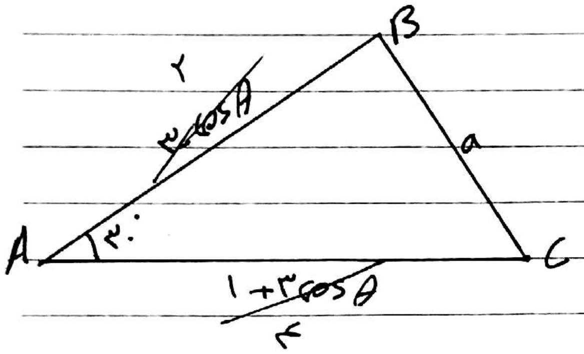
$\hookrightarrow b^2+c^2-2bc\cos A$

$$\cancel{b^2}+\cancel{c^2}+bc = \cancel{b^2}+\cancel{c^2}-2bc\cos A \rightarrow 2bc\cos A = -bc$$

$$\hookrightarrow \boxed{\cos A = -\frac{1}{2}}$$

---

۱۰)



$S = \frac{1}{2} bc \sin 30$

$$\frac{1}{2} \times (3-\cos\theta)(1+3\cos\theta) \times \frac{1}{2} = 2$$

$$(3-\cos\theta)(1+3\cos\theta) = 8$$

$$3+9\cos\theta-\cos\theta-3\cos^2\theta = 8$$

$$3\cos^2\theta - 8\cos\theta + 5 = 0 \rightarrow \cos\theta = \boxed{1} \checkmark$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{5}{3} \rightarrow$$ غ ق ق

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos 30 \rightarrow 4+16-8\sqrt{3} = 20-8\sqrt{3} = a^2$$

$$\boxed{a = \sqrt{20-8\sqrt{3}}}$$