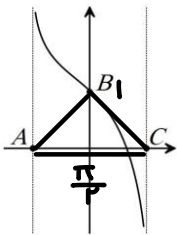


تألیف حور، حقیقی

۲۰

①



شکل زیر بخشی از نمودار تابع $y = \tan\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right)$ می باشد. مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

$$\text{دوره تناوب} = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$S = \frac{\pi}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

②

اگر یکی از ریشه های معادله $x^2 - (\sin \alpha)x - \frac{1}{4}\cos^2 \alpha = 0$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد مقدار $1 + \tan^2 \alpha$ را بیابید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sin \alpha - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin^2 \alpha = 0$$

$$\frac{1}{4}\sin^2 \alpha - \frac{2}{3}\sin \alpha + \frac{1}{4} = 0 \quad \sin \alpha = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2 \alpha = 1 \quad \cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

خ $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$

③

اگر $\log(\sin \alpha) - \log(-\cos \alpha) = \log 3$ برقرار باشد حاصل $\sin \alpha - \cos \alpha$ را بیابید.

$$9\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\log \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \log 3$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3 \quad \sin \alpha = -3\cos \alpha$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{10}$$

④

اگر $\sin^4 \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{5}$ باشد حاصل $\cos^4 \theta + \sin^2 \theta$ را بدست آورید.

$$\sin^4 \theta + 1 - \sin^2 \theta = \frac{4}{5}$$

$$(1 - \sin^2 \theta)^2 + \sin^2 \theta$$

$$\sin^4 \theta - 2\sin^2 \theta + 1 + \sin^2 \theta = \sin^4 \theta - \sin^2 \theta + 1 = \frac{4}{5}$$

⑤

اگر $\frac{2}{3}\sin x + \sin x \cos x < 0$ و $\sin x \tan x - \frac{1}{\cos x} > 0$ آنگاه انتهای کمان مثلثاتی x کدام ناحیه می باشد؟

ناحیه

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\cos^2 x < 0$$

$$\frac{2 - 2\cos^2 x}{2(\sin x + \cos x)} < 0 \quad \sin x < 0$$

⑥

اگر $\frac{2}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} = 0$ باشد حاصل $\tan x + \cot x$ را بدست آورید. $(\sin x, \cos x \neq 0)$

$$\frac{9\sin^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 \quad \sin^2 x = \frac{1}{10} \quad \cos^2 x = \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{x}{x - \frac{4}{13}} = -\frac{13}{9}$$

$$0 = \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\sin x \cos x} = 0$$

بسته به $\sin x$ و $\cos x$ مثبت و منفی است.

⑦

حاصل عبارت $\frac{\sqrt{1 + \sin 50^\circ} \cos 50^\circ}{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}$ را بدست آورید.

$$\sqrt{1 + \sin 50^\circ}$$

$$\cos 10^\circ = \cos(40^\circ - 30^\circ) \quad \sin(10^\circ - 40^\circ) = \frac{1}{2}\cos 30^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 30^\circ = \cos 50^\circ$$

⑧

حاصل عبارت $\frac{(1 - 2\sin^2 50^\circ)(2\cos^2 10^\circ - 1)}{(1 + \tan^2 20^\circ)} \left(\frac{1 - \tan^2 20^\circ}{1 + \tan^2 20^\circ} \right)$ را بر حسب کمان مثلثاتی از زاویه ی ۱۰ درجه بیابید.

$$\frac{(\cos 10^\circ - \cos 10^\circ) \frac{1}{2}\sin 20^\circ - \cos 20^\circ \frac{1}{2}\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{\tan 10^\circ} = \frac{1}{\cot 80^\circ} = \frac{1}{\tan 10^\circ}$$

⑨

اگر $\sin \alpha + 3\cos \alpha = 2$ باشد مقدار $5\cos^2 \alpha - 12\cos \alpha$ را بدست آورید.

$$10\cos^2 \alpha - 12\cos \alpha - 6 = -6$$

$$\sin \alpha = 2 - 3\cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 4 + 9\cos^2 \alpha - 12\cos \alpha$$

$$9\cos^2 \alpha - 12\cos \alpha + 4 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$10\cos^2 \alpha - 12\cos \alpha - 3 = 0$$

⑩

در مثلث ABC اگر $\sin \hat{B} \sin \hat{C} = \cos^2 \frac{\hat{A}}{2}$ و $\hat{B} = 72^\circ$ باشد زاویه ی $\hat{A}$ را بدست آورید.

$$2\left(\frac{1}{2}(\cos B - \cos(A - B))\right) = 1 + \cos A$$

$$\cos(B - A) = \frac{\cos(B - A) + \cos A}{2} = \cos A + 1 \quad 120^\circ - 144^\circ \Rightarrow A = 36^\circ$$

$$\sin B \times \sin C = \frac{1 + \cos A}{2}$$

$$\sin B \times \sin C = 1 + \cos A$$

⑪

$$B - C = 0 \rightarrow B = C$$