مریم توکلی   دوازدهم A صبح   تکلیف ۱۶

سوال ۱)

الف) $\cos 2x = 3\sin x - 1$

$\rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\rightarrow \sin x = \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \sin x = -2 & \text{غ ق ق} \\ \sin x = \frac{1}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$

$\rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x \in \boxed{2k\pi + \frac{\pi}{6}}$

$\searrow x \in 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \boxed{2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$

ب)

$\cos 2x + \cos x - 2 = 0$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm 5}{4} \begin{cases} \cos x = -\frac{3}{2} & \text{غ ق ق} \\ \cos x = 1 & \text{ق ق} \end{cases}$

$\cos x = 1 \rightarrow \boxed{x \in 2k\pi}$

سوال ۲)

الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 4x$

$\underbrace{\cancel{(\sin^2 x + \cos^2 x)}}_{1}(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$

$\Rightarrow \underbrace{\sin 4x}_{2\sin 2x \cos 2x} = -\cos 2x \longrightarrow 2\sin 2x \cancel{\cos 2x} = -\cancel{\cos 2x}$

$\Rightarrow \sin 2x = \frac{-1}{2}$ و $\cos 2x = 0$

$\nearrow 2x \in 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x \in \boxed{k\pi + \frac{7\pi}{12}}$

$\rightarrow 2x \in 2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x \in \boxed{k\pi - \frac{\pi}{12}}$

$\searrow 2x \in 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow x \in \boxed{k\pi \pm \frac{\pi}{4}}$

ب) $\underbrace{۲\cos^۲ x}_{۱+\cos ۲x} + \underbrace{۲\sin x \cos x}_{\sin ۲x} = ۱$

$\rightarrow \cancel{۱} + \cos ۲x + \sin ۲x = \cancel{۱} \rightarrow \cos ۲x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = -\sin ۲x$

$۲x \rightarrow ۲x \in ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \rightsquigarrow \boxed{x \in k\pi + \frac{۳\pi}{۸}}$

$\quad\rightarrow ۲x \in ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۴} \rightsquigarrow \boxed{x \in k\pi + \frac{۷\pi}{۸}}$

سوال ۳)

الف) $\cot x\,(۲\cos x + ۱) = \frac{۱}{\sin x}$

$\rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}(۲\cos x + ۱) - \frac{۱}{\sin x} = ۰ \rightarrow \frac{۱}{\sin x}(۲\cos^۲ x + \cos x - ۱) = ۰$

$\sin x \neq ۰$ $\qquad \cos x = \frac{-۱ \pm ۳}{۴}$ $\quad \cos x = -۱$, $\cos x = \frac{۱}{۲}$ ق ق

اگر $\cos x = -۱$ باشد آنگاه $\sin x = ۰$ خواهد بود که غیرقابل قبول است!

$\cos x = \frac{۱}{۲} \longrightarrow \boxed{x \in ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}}$

ب) $۲\sin^۲ x - \sin x \cos x + \cos^۲ x = ۲$

$\rightarrow \underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱} + \sin^۲ x - \sin x \cos x = \overset{۱}{\cancel{۲}}$

$\Rightarrow \cancel{\sin^۲ x} - \sin x \cos x = \cancel{\sin^۲ x} + \cos^۲ x$

$\Rightarrow \cos^۲ x + \sin x \cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(\cos x + \sin x) = ۰$

$\cos x = ۰$ $\qquad \sin x = -\cos x$

$x \rightarrow \boxed{x \in ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}}$

$\quad \rightarrow \boxed{x \in ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}}$

$\quad \rightarrow \boxed{x \in ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۴}}$

سوال ۴)

الف) $\cos(\frac{\pi}{۴}+x)\underbrace{\cos(x-\frac{\pi}{۴})}=\frac{۱}{۴}$

↳ $\cos(x-\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{\pi}{۴}-x)$ → دو زاویه متمم به دست آوردیم!

$\rightarrow \underbrace{\sin(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x+\frac{\pi}{۴})}_{\frac{۱}{۲}\sin(۲x+\frac{\pi}{۲})}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \underbrace{\sin(۲x+\frac{\pi}{۲})}_{\cos ۲x}=\frac{۱}{۲}$

$\rightarrow \cos ۲x=\frac{۱}{۲} \rightarrow ۲x\in ۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \rightarrow \boxed{x\in k\pi\pm\frac{\pi}{۶}}$

ب) $\cos(۲x-\frac{\pi}{۹})=-\sin ۲x$

$\rightarrow \cos(۲x-\frac{\pi}{۹})=\sin(-۲x)=\cos(۲x+\frac{\pi}{۲})$

$\rightarrow \cancel{۲x}-\frac{\pi}{۹}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\cancel{۲x} \rightsquigarrow$ غ ق ق

$\rightarrow ۲x-\frac{\pi}{۹}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۲x \Rightarrow ۴x=۲k\pi\underbrace{-\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۹}}_{-\frac{۷\pi}{۱۸}} \Rightarrow \boxed{x\in\frac{k\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۷۲}}$

سوال ۵)

$\frac{\sin ۴x+\sin ۲x}{\sin ۲x}-\sin^۲ x=\cos^۲ x \rightsquigarrow \sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$

$\rightarrow \frac{۲\sin ۲x\cos ۲x+\sin ۲x}{\sin ۲x} \rightarrow \frac{\cancel{\sin ۲x}(۲\cos ۲x+۱)}{\cancel{\sin ۲x}}=۲\cos ۲x+۱$

$\Rightarrow ۲\cos ۲x+\cancel{۱}=\cancel{۱} \Rightarrow ۲\cos ۲x=۰ \Rightarrow \cos ۲x=۰ \rightarrow ۲x\in ۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$

$\rightarrow x\in\boxed{k\pi\pm\frac{\pi}{۴}}$

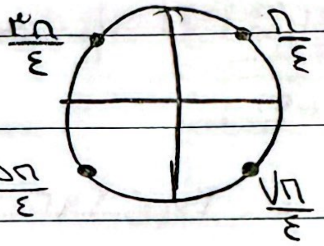
Subject:
Year. Month. Date.

سوال ۶)

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} + \cot\frac{x}{2} \qquad \left[-\pi , \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\to \frac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}} = \frac{1+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \Rightarrow \tan\frac{x}{4} = \frac{1}{\tan\frac{x}{4}} \Rightarrow \tan^2\frac{x}{4} = 1$$

$$\to \tan\frac{x}{4} = \pm 1$$



$$\frac{x}{4} \in \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} \to x \in 2k\pi \pm \pi$$

$$-\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$$

$$\Big\} \; x = -\pi , \pi$$

→ تفاضل $= \boxed{2\pi}$

سوال ۷)

$$\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} - \sin^2 x \cos 3x = 1 \qquad [0 , 2\pi]$$

$$\to \cancel{1} - \sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = \cancel{1} \Rightarrow \underbrace{-\sin^2 x}_{\sin x = 0}\underbrace{(1+\cos 3x)}_{\cos 3x = -1} = 0$$

$$x \begin{cases} \to x \in k\pi \\ \to 3x \in 2k\pi \pm \pi \to x \in \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

بازه $[0 , 2\pi]$ $\to \underbrace{0 , \pi , 2\pi , \frac{\pi}{3} , \frac{5\pi}{3}}_{\boxed{\text{۵ جواب}}}$

سوال ۸)

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan ۲x$$

$$\hookrightarrow \frac{\tan\frac{\pi}{۴} - \tan x}{1+(\tan\frac{\pi}{۴}\times \tan x)} = \tan ۲x \longrightarrow \tan(\frac{\pi}{۴}-x) = \tan ۲x$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} - x \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

$$\rightsquigarrow x \in \boxed{\frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲}}$$

سوال ۹)

$$\sqrt{1+\sin ۲x} = \sqrt{۲}\cos ۲x \qquad [0, \pi]$$

$$\rightarrow \cos ۲x > 0 \longrightarrow 1+\sin ۲x = ۲\underbrace{\cos^۲ ۲x}_{(1-\sin^۲ ۲x)}$$

$$\rightarrow 1+\sin ۲x = ۲ - ۲\sin^۲ ۲x \longrightarrow ۲\sin^۲ ۲x + \sin ۲x - 1 = 0$$

$$\sin ۲x = \frac{-1 \pm ۳}{۴} \begin{cases} \sin ۲x = -1 \rightarrow ۲x \in ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \angle ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ \sin ۲x = \frac{1}{۲} \rightarrow ۲x \in ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \angle ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

$$x \in k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \,/\, k\pi - \frac{\pi}{۴} \,/\, k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \,/\, k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲}$$

$\rightarrow \frac{۳\pi}{۴} , \frac{\pi}{۱۲} , \frac{۵\pi}{۱۲} \Rightarrow$ [۳ جواب]

سوال ۱۰)

الف) $\sin^۴ x - \cos^۴ x = 1 \qquad [0, ۲\pi]$

$$-\cos ۲x \rightarrow -\cos ۲x = 1 \Rightarrow \cos ۲x = -1 \rightarrow ۲x \in ۲k\pi \pm \pi$$

$$\rightarrow x \in k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \rightsquigarrow \boxed{\frac{\pi}{۲} , \frac{۳\pi}{۲}}$$

ب) $\sin^۳ x - \cos^۳ x = -1$

* مقادیر مختلف را امتحان می‌کنیم.

$x = 0 \rightarrow 0 - 1 = -1$ ✓ $\quad x = \pi \rightarrow 0 - (-1) \neq -1$ ✗ $\quad x = ۲\pi \rightarrow 0 - 1 = -1$ ✓

$x = \frac{\pi}{۲} \rightarrow 1 - 0 \neq -1$ ✗ $\quad x = \frac{۳\pi}{۲} \rightarrow -1 - 0 = -1$ ✓ $\rightsquigarrow \boxed{0 , \frac{۳\pi}{۲} , ۲\pi}$