۱۹٫۷۵ آفرین خیلی عالی نوشتی!

مبینا عطالت الحسینی — دوازدهم دختر A . جعبه

۱ـ

الف) $\cos ۲x = ۳\sin x - ۱$

②

$۱ + \cos ۲x = ۳\sin x$

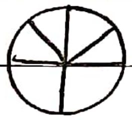
$۲\cos^۲ x = ۳\sin x \Rightarrow ۲(۱ - \sin^۲ x) = ۳\sin x \Rightarrow$

$۲ - ۲\sin^۲ x = ۳\sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x + ۳\sin x - ۲ = ۰$

$\Delta = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \longrightarrow \sin x = \frac{-۳ \pm ۵}{۴}$ $\nearrow \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$ ✓ $\searrow \frac{-۸}{۴} = -۲$ ✗

$\sin x = \frac{۱}{۲} \to \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}}$ ✓

$\boxed{x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}}$ ✓

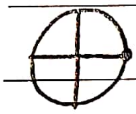


ب) $\cos ۲x + \cos x - ۲ = ۰$

$۲\cos^۲ x - ۱ + \cos x - ۲ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۳ = ۰$

$\Delta = ۱ + ۲۴ = ۲۵ \Rightarrow \cos x = \frac{-۱ \pm ۵}{۴}$ $\nearrow ۱$ ✓ $\searrow \frac{-۶}{۴} = \frac{-۳}{۲}$ ✗

$\cos x = ۱ \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi}$ ✓



۲ـ

الف) $\sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin ۴x$

②

$(\overbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}^{۱})(\sin^۲ x - \cos^۲ x) = \sin ۴x$

$-\cos ۲x = \sin ۴x$

$\sin(\frac{\pi}{۲} + ۲x) = \sin ۴x$

$\to ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۲x$

$۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{۴}}$ ✓

$\to ۴x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} - ۲x$

$۶x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲}}$ ✓

$۱ - ۲\cos^۲x$

ب) $\overset{}{۲\cos^۲x} + ۲\sin x\cos x = ۱$

$\sin ۲x = -\cos ۲x$

$\sin ۲x = \sin\left(\frac{\pi}{۲} + ۲x\right)$

$\to ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۲x$ ✗

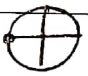
$\to ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} - ۲x$

$۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \longrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}}$ ✓

۳- الف) $\cot x(۲\cos x + ۱) = \frac{۱}{\sin x}$

$\xrightarrow{\times \sin x} \cos x(۲\cos x + ۱) = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲x + \cos x - ۱ = ۰$ ②

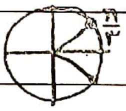
$\xrightarrow{a+c=b} \cos x = -۱ \qquad \cos x = \frac{۱}{۲}$



$x = ۲k\pi + \pi$ ✗

$\sin x$ ✓ در مخرج ×

مخرج ایجاد شده است



$\boxed{x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}}$ ✓

ب) $۲\sin^۲x - \sin x\cos x + \cos^۲x = ۲$

$۲\sin^۲x + \cos^۲x - \sin x\cos x = ۲ \xrightarrow{\div \sin^۲x}$

$۲ + \cot^۲x - \cot x = ۲\left(\frac{۱}{\sin^۲x}\right) \to ۱ + \cot^۲x$

$\cancel{۲} + \cot^۲x - \cot x = \cancel{۲} + ۲\cot^۲x$

$\cot^۲x + \cot x = ۰ \to \cot x(\cot x + ۱) = ۰$

$\to \cot x = ۰$

$\to \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{۲}}$ ✓

$\to \cot x = -۱$

$\to \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۴}}$

۴- الف) $\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{۴} + x\right)}\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{۴}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۲} + \left(x - \frac{\pi}{۴}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۴} + x\right)$ ②

$\cos\left(\frac{\pi}{۴} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{۴} + x\right) = \frac{۱}{۴}$

$\frac{۱}{۲}\sin\left(۲x + \frac{\pi}{۲}\right) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin\left(۲x + \frac{\pi}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \longrightarrow \sin\left(۲x + \frac{\pi}{۲}\right) = \sin\frac{\pi}{۶}$

ادامه در صفحه بعد ←

$\sin(۲x+\frac{\pi}{۲}) = \sin\frac{\pi}{۶}$

$\to ۲x+\frac{\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \rightsquigarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۶} \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۶}}$ ✓

$\to ۲x+\frac{\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \rightsquigarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۶} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{۶}}$ ✓

ب) $\cos(۲x - \frac{\pi}{۹}) = -\sin۲x \to \sin(-۲x)$

$\cos(۲x - \frac{\pi}{۹}) = \sin(\frac{\pi}{۲} - (۲x - \frac{\pi}{۹}))$

$\sin(\frac{\pi}{۲} - (۲x - \frac{\pi}{۹})) = \sin(-۲x)$

$\to -۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x + \frac{\pi}{۹}$ ✗

$\to -۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} + ۲x - \frac{\pi}{۹}$

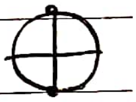
$-۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۹}$

$-۴x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۱۸} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{۷\pi}{۷۲}}$ ✓

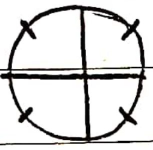
ه_ $\frac{\overset{۲\sin۲x\cos۲x}{\sin۴x} + \sin۲x}{\sin۲x} - \sin^۲x = \cos^۲x$

۲

$۲\cos۲x + \cancel{1} = \cancel{\cos^۲x + \sin^۲x} \Rightarrow ۲\cos۲x = 0$



$\Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$



$* \sin۲x \neq 0$ باتوجه به دامنه تابع این معادله فاقد جواب است

$x \in [-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ -۶

$$\frac{\sin\frac{x}{۲}}{۱+\cos\frac{x}{۲}} = \frac{۱}{\sin\frac{x}{۲}} + \cot\frac{x}{۲}$$

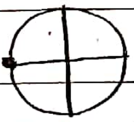
۲

$$\frac{\cancel{۲}\sin\frac{x}{۴}\cancel{\cos\frac{x}{۴}}}{\cancel{۲}\cos^{۲}\frac{x}{۴}} = \frac{۱+\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}} \qquad ۱+\cos\frac{x}{۲} \to ۲\cos^{۲}\frac{x}{۴} \qquad \sin\frac{x}{۲} \to ۲\sin\frac{x}{۴}\cancel{\cos\frac{x}{۴}}$$

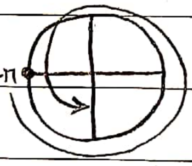
$$\tan\frac{x}{۴} = \cot\frac{x}{۴} \Rightarrow \tan\frac{x}{۴} = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۴}\right)$$

$$\frac{x}{۴} = k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۴} \Rightarrow \frac{x}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \pi}$$

$$\xrightarrow[x=\pi]{\text{حیطنز}} ۱+\overset{\circ}{\cos\frac{\pi}{۲}} \neq ۰ ✓ \qquad \sin\frac{\pi}{۲} \neq ۰ ✓ \qquad \sin\frac{\pi}{۲} \neq ۰ ✓$$



$x \in [-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$



$$\xrightarrow[\text{جواب ها}]{\text{قدرمطلق تفاضل}} \boxed{|-\pi - (\pi)| = ۲\pi}$$ ✓

$\cos^{۲}x - \sin^{۲}x\cos ۳x = ۱ \qquad x \in [۰, ۲\pi]$ -۷

۱/۷۵

$$\cos^{۲}x - ۱ = \sin^{۲}x\cos ۳x$$

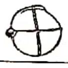
$$-\sin^{۲}x = \sin^{۲}x\cos ۳x$$

$$\sin^{۲}x\cos ۳x + \sin^{۲}x = ۰$$

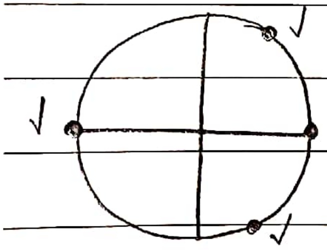
$$\sin^{۲}x(\cos ۳x + ۱) = ۰ \longrightarrow$$

$\sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$

$\cos ۳x = -۱ \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \pi$



$x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}$



$\Rightarrow$ چهار جواب

-۸

۲

$$\frac{۱ - \tan x}{۱ + \tan x} = \tan ۳x \qquad \tan x \to \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\sin ۳x}{\cos ۳x}$$

$$\cos ۳x\cos x - \sin x\cos ۳x = \cos x\sin ۳x + \sin x\sin ۳x$$

$$\cos ۳x\cos x - \sin ۳x\sin x = \cos x\sin ۳x + \sin x\cos ۳x$$

$$\cos ۴x = \sin ۴x \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{۲} - ۴x\right) = \sin ۴x$$

$$۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۴x \qquad ۴x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} + ۴x \; ✗$$ ✓

$$۸x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \boxed{\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}}$$

۹. $\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 2x \qquad x\in[0,\pi]$

۲

$\sqrt{(\sin x+\cos x)^2} = \sqrt{2}\cos 2x$

$|\sin x+\cos x| = \sqrt{2}\cos 2x$

$\cancel{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cancel{\sqrt{2}}\cos 2x$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

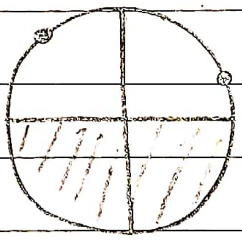
$x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi+\frac{\pi}{2}-2x$ یا $x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+2x$

$3x = 2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$; $-x = 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$

$3x = 2k\pi+\frac{\pi}{4}$; $-x = 2k\pi+\pi-\frac{3\pi}{4}$

$\boxed{x = \frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}}$ ✓ ; $-x = 2k\pi+\frac{\pi}{4}$

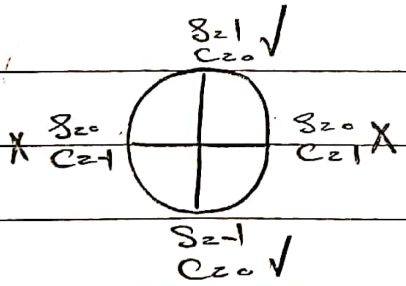
$\boxed{x = 2k\pi-\frac{\pi}{4}}$



$\Rightarrow$ ✓ دو جواب

۱۰. $x\in[0,2\pi]$

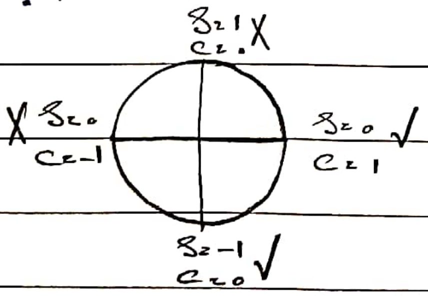
الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$



$\Rightarrow x=\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

۲

ب) $\sin^3 x - \cos^3 x = -1$



$\Rightarrow$ ✓ $x=\left\{0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

سوال ۷

$$\cos^{۲} x - \sin^{۲} x \cos ۴x = ۱ \xrightarrow{\cos^{۲} x = ۱ - \sin^{۲} x}$$

$$\cancel{۱} - \sin^{۲} x - \sin^{۲} x \cos ۴x = \cancel{۱} \longrightarrow \sin^{۲} x (۱ + \cos ۴x) = ۰$$

$\rightarrow \sin x = ۰$

$\rightarrow \cos ۴x = -۱$

$$\sin x = ۰ \longrightarrow x = k\pi \longrightarrow x = \overset{③}{۰}, \overset{②}{\pi}, \overset{①}{۲\pi}$$

$$\cos ۴x = -۱ \longrightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{۲k\pi + \pi}{۳} \rightarrow x = \overset{⑤}{\frac{\pi}{۴}}, ۳\pi, \overset{④}{\frac{۵\pi}{۴}}$$

معادله ۵ جواب دارد