تکلیف پریا سادات حسینی

به نام خدا

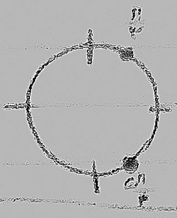
۸

سوال ① در بازه‌ی $[0, ۲\pi]$

$۸\cos x - \tan^۲ x = ۱ \Rightarrow ۸\cos x = \underbrace{۱ + \tan^۲ x}_{\frac{۱}{\cos^۲ x}}$

$\Rightarrow ۸\cos x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۸\cos^۳ x = ۱ \rightarrow \cos^۳ x = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲}$

۲



$\Rightarrow \boxed{x = ۲\pi \pm \frac{\pi}{۳}}$ ✓

سوال ② در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$

۰/۵

$۵\underbrace{\sin^۲(x)}_{(۱-\cos^۲ x)} + ۲\cos(۳x) = -۲$

c

-۲

$\cos ۳x = ۲\cos^۲\frac{۳x}{۲} - ۱$ (فرمول طلایی)

$۵\sin^۲ x + ۲(۲\cos^۲\frac{۳x}{۲} - ۱) = -۲ \rightarrow ۵\sin^۲ x + ۴\cos^۲\frac{۳x}{۲} \cancel{-۲} = \cancel{-۲}$

حاصل جمع دو عدد نامنفی صفر است پس هر دو صفر بوده اند!

$۵\sin^۲ x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \xrightarrow{-\pi \leq x \leq \pi}$ $x = \pi$ یا $-\pi$ یا 0

$۴\cos^۲\frac{۳x}{۲} = 0 \rightarrow \cos\frac{۳x}{۲} = 0 \rightarrow \frac{۳x}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = \frac{۲k\pi + \pi}{۳}$

$\xrightarrow{x \in \pi}$ $x = -\pi$ یا $-\frac{\pi}{۳}$ یا $\frac{\pi}{۳}$ یا π

۱

اشتراک مجموعه جواب $\{\pi, -\pi\}$ است

سوال ③ در بازه‌ی $[0, ۲\pi]$

۰/۵

$۲\sin(x)\underbrace{\cos(۲x)} + \sin x = ۱$

$\sin x(۲\underbrace{\cos ۲x}_{(۱-۲\sin^۲ x)} + ۱) = ۱$

$\sin x(۲ - ۴\sin^۲ x + ۱) = ۱$

$(۳ - ۴\sin^۲ x) = \frac{۱}{\sin x}$

$\sin^۲ x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}$

$-\cos ۲x = ۲\sin^۲ x - ۱$

$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$

سوال ④ در بازه‌ی $[0, \pi]$

$\frac{۱}{\sin(\frac{\pi + ۴x}{۲})} + \frac{۱}{\cos(\frac{\pi + ۸x}{۲})} = 0$

۲

$\frac{۱}{\sin(\frac{\pi}{۲} + ۲x)} + \frac{۱}{\cos(\frac{\pi}{۲} + ۴x)} = 0 \Rightarrow \frac{۱}{\cos ۲x} + \frac{۱}{-\sin ۴x} = 0 \Rightarrow \frac{۱}{\cos ۲x} = \frac{۱}{۲\sin ۲x\cos ۲x}$

$\cos ۲x = ۲\sin ۲x \cancel{\cos ۲x} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$

$\rightarrow ۲x = ۲\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{۱۲}$

$\hookrightarrow ۲x = ۲\pi + \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = \pi + \frac{۵\pi}{۱۲}$

اختلاف $\Rightarrow \pi + \frac{۵\pi}{۱۲} - (\pi + \frac{\pi}{۱۲}) = \frac{۴\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۳} = \alpha$

$\Rightarrow \tan ۲\alpha = \tan\frac{۲\pi}{۳} = \boxed{-\sqrt{۳}}$ ✓

کیاسادات حسینی

سوال ⑧

در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$

$$۴ \sin x \underbrace{\sin\left(\frac{۳\pi}{۲} - x\right)}_{-\cos x} = ۱ \Rightarrow -۲\left(\underbrace{۲ \sin x \cos x}_{\sin ۲x}\right) = ۱$$

۱,۲۵

$$\sin ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{۲x = ۲\pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{۱۲}}$$

$$\boxed{۲x = ۲\pi - \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = \pi - \frac{۵\pi}{۱۲}}$$

سوال ⑨

در بازه‌ی $[۰, \pi]$

$$\left(\underbrace{۱ + \cos(۲\alpha)}_{۲\cos^۲\alpha}\right)\left(\underbrace{۱ + \cos(۴\alpha)}_{۲\cos^۲ ۲\alpha}\right)\left(\underbrace{۱ + \cos(۸\alpha)}_{۲\cos^۲ ۴\alpha}\right) = \frac{۱}{۸}$$

.۷۵

$$۸ \cos^۲\alpha \cos^۲ ۲\alpha \cos^۲ ۴\alpha = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \cos^۲\alpha \cos^۲ ۲\alpha \cos^۲ ۴\alpha = \frac{۱}{۶۴}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \cos ۲\alpha \cos ۴\alpha = \frac{۱}{۸}$$

سوال ⑩

در بازه‌ی $[\pi, ۲\pi]$

$\tan(۳x) =$

$$\tan(۳x)\tan(x) = ۱ \Rightarrow \underbrace{\tan(۳x) = \cot(x)}$$

۱

زوایای متمم، tan , cot برابر دارند.

$$\Rightarrow ۳x + x = ۴x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{۸}}$$

(۳)

$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ (فرمول طلایی)

۳ ٤ ۳

$۲\sin x(۱ - ۲\sin^۲ x) + \sin x = ۱ \longrightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۱$

$\sin ۳x = ۱ \longrightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \longrightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \xrightarrow{۰ \leq x \leq ۲\pi}$

$k = ۰ \longrightarrow x = \frac{\pi}{۶}$, $k = ۱ \longrightarrow x = \frac{۵\pi}{۶}$, $k = ۲ \longrightarrow x = \frac{۹\pi}{۶}$

$S = \frac{\pi}{۶} + \frac{۵\pi}{۶} + \frac{۹\pi}{۶} = \frac{۱۵\pi}{۶} = \boxed{\frac{۵\pi}{۲}}$

---

(۵)

$\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{۳}}{۶} \longrightarrow \cos x - \sin x = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}$

$\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{\sqrt{۶}}{۳} \longrightarrow \boxed{\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{۶}}{۳}}$

$(\cos x - \sin x)^۲ = ۱ - \sin ۲x = \frac{۶}{۹} \longrightarrow \boxed{\sin ۲x = \frac{۱}{۳}}$

$m(\cos x - \sin x) - ۳\sqrt{۶}(\sin ۲x) = \sqrt{۶} \longrightarrow \frac{\sqrt{۶}}{۳}m - ۳\sqrt{۶}(\frac{۱}{۳}) = \sqrt{۶}$

$\frac{\sqrt{۶}}{۳}m - \sqrt{۶} = \sqrt{۶} \longrightarrow \frac{m\sqrt{۶}}{۳} = ۲\sqrt{۶} \longrightarrow \boxed{m = ۶}$

---

(۶)

$\cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \cos(\frac{\pi}{۳} - x)$

$\frac{\pi}{۳} - x + x + \frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۲} \longrightarrow \cos(\frac{\pi}{۳} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{۶})$

$\sin^۲(x + \frac{\pi}{۶}) = ۱ \longrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۶}) = \pm ۱ \longrightarrow x + \frac{\pi}{۶} = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

$x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{۰ \leq x \leq ۲\pi} k = ۰ \longrightarrow x = \frac{\pi}{۳}$, $k = ۱$, $x = \frac{۴\pi}{۳}$

معادله ۲ جواب در بازه دارد

(۷) عبارت را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ \sin x + \sin ۶۰^\circ \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \longrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \longrightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{-\pi \le x \le ۲\pi} k = ۰ \text{ و } ۱ \to x = -\frac{\pi}{۱۲}, \frac{۲۳\pi}{۱۲} \\ x+\frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \longrightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \xrightarrow{-\pi \le x \le ۲\pi} k = ۰ \to x = \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

$$S = \frac{۲۳\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۱۲} + \frac{۵\pi}{۱۲} = \frac{۲۷\pi}{۱۲} = \boxed{\frac{۹\pi}{۴}}$$

---

(۸)

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲} - x\right) = -\cos x$$

$$۴\sin x(-\cos x) = ۱ \longrightarrow -۲(۲\sin x\cos x) = ۱ \longrightarrow \sin ۲x = -\frac{۱}{۲}$$

$$۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \text{ یا } ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \longrightarrow x = \overset{2}{k\pi - \frac{\pi}{۱۲}} \text{ یا } \overset{1}{k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}}$$

$$\xrightarrow{۰ \le x \le ۲\pi} \begin{cases} {}^{1}\; k = ۰ \text{ و } ۱ \longrightarrow x = \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۱۹\pi}{۱۲} \\ {}_{2}\; k = ۱, ۲ \longrightarrow x = \frac{۱۱\pi}{۱۲} \text{ و } \frac{۲۳\pi}{۱۲} \end{cases}$$

$$S = \frac{۷\pi}{۱۲} + \frac{۱۹\pi}{۱۲} + \frac{۱۱\pi}{۱۲} + \frac{۲۳\pi}{۱۲} = \frac{۶۰\pi}{۱۲} = \boxed{۵\pi}$$

---

(۱۰)

$$\text{an}\,۳x = \frac{۱}{\tan x} = \cot x \longrightarrow \tan ۳x = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$$

$$۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \longrightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$$

k	۴	۵	۶	۷
x	$\frac{۹\pi}{۸}$	$\frac{۱۱\pi}{۸}$	$\frac{۱۳\pi}{۸}$	$\frac{۱۵\pi}{۸}$

$$S = \left(\frac{۹+۱۱+۱۳+۱۵}{۸}\right)\pi = \frac{۴۸\pi}{۸} = \boxed{۶\pi}$$

⑨

$$1+\cos ۲\star = ۲\cos^{۲}\star$$

$$\left.\begin{cases} 1+\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha \\ 1+\cos ۴\alpha = ۲\cos^{۲} ۲\alpha \\ 1+\cos ۸\alpha = ۲\cos^{۲} ۴\alpha \end{cases}\right\} \rightarrow ۸\cos^{۲}\alpha \cos^{۲} ۲\alpha \cos^{۲} ۴\alpha = \frac{1}{۸}$$

$$\cos^{۲}\alpha \cos^{۲} ۲\alpha \cos^{۲} ۴\alpha = \frac{1}{۶۴} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \cos\alpha \cos ۲\alpha \cos ۴\alpha = \frac{\pm 1}{۸} \xrightarrow[\sin\alpha \neq ۰]{\times \sin\alpha \ \star}$$

$$\underbrace{(\sin\alpha \cos\alpha)}_{\sin ۲\alpha} \cos ۲\alpha \cos ۴\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{۸} \rightarrow \frac{1}{۲}\underbrace{(\sin ۲\alpha \cos ۲\alpha)}_{\frac{1}{۲}\sin ۴\alpha} \cos ۴\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{۸}$$

$$\frac{1}{۲} \times \frac{1}{۲}\underbrace{(\sin ۴\alpha \cos ۴\alpha)}_{\sin ۸\alpha} = \frac{\pm\sin\alpha}{۸} \rightarrow \frac{1}{\cancel{۸}} \sin ۸\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\cancel{۸}}$$

$$\sin ۸\alpha = \pm\sin\alpha \rightarrow \begin{cases} ۸\alpha = ۲k\pi + \alpha \ \text{یا} \ ۲k\pi + \pi - \alpha \\ ۸\alpha = ۲k\pi - \alpha \ \text{یا} \ ۲k\pi + \pi + \alpha \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{۲k\pi}{۷} \xrightarrow{\text{MAX } A} k = ۳ \rightarrow x = \frac{۶\pi}{۷}$$

$$\alpha = \frac{۲k\pi}{۹} \xrightarrow{\text{MAX } A} k = ۴ \rightarrow x = \frac{۸\pi}{۹}$$

$$\alpha = \frac{(۲k+1)\pi}{۷} \xrightarrow{\text{MAX } A} k = ۲ \rightarrow x = \frac{۵\pi}{۷}$$

$$\alpha = \frac{(۲k+1)\pi}{۹} \xrightarrow{\text{MAX } A} k = ۳ \rightarrow x = \frac{۷\pi}{۹}$$

$$\rightarrow \boxed{\text{MAX } A = \frac{۸\pi}{۹}}$$

$\star$ A نمی‌تواند برابر خود π باشد چون طبق $\star$ $\sin\alpha$ را مخالف صفر در نظر گرفته‌ایم!