پریا شهرکی نیا

۲۰ آفرین به شما!

۱-

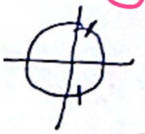
[۰;۲π]

$$۸\cos x - \tan^۲ x = ۱ \xrightarrow{۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \to \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} - ۱} ۸\cos x - \left(\frac{۱}{\cos^۲ x} - ۱\right) = ۱ \longrightarrow$$

$$\to ۸\cos x - \frac{۱}{\cos^۲ x} = ۰ \longrightarrow ۸\cos^۳ x - ۱ = ۰ \to \cos^۳ x = \frac{۱}{۸} \to \cos x = \frac{۱}{۲}$$

$x = \frac{\pi}{۳} , \frac{۵\pi}{۳} \longrightarrow$ ۲ تا ریشه دارد ✓

⑤



۲-

[-π,π]

$$۵\sin^۲(x) + ۲\cos(۳x) = -۲$$

$$۵\sin^۲ x = ۵(۱-\cos^۲ x) , ۲\cos ۳x = ۲(۴\cos^۳ x - ۳\cos x) = ۸\cos^۳ x - ۶\cos x$$

$$۵ - ۵\cos^۲ x + ۸\cos^۳ x - ۶\cos x = -۲ \to ۸\cos^۳ x - ۵\cos^۲ x - ۶\cos x + ۷ = ۰ \xrightarrow{\text{حدس اولیه}} \cos x = -۱ \to$$

$$\to (\cos x + ۱)(\underbrace{۸\cos^۲ x - ۱۳\cos x + ۷}_{\Delta < ۰ \text{ ریشه ندارد}}) \to \cos x = -۱ \to x = \pi , -\pi \to$$ ۲ جواب دارد ✓

⑤

۳-

$$۲\sin(x)\cos(۲x) + \sin(x) = ۱$$

$$۲\sin x(۱ - ۲\sin^۲ x) + \sin x = ۱ \to ۲\sin x - ۴\sin^۳ x + \sin x = ۱ \to \underbrace{۳\sin x - ۴\sin^۳ x}_{\sin ۳x} = ۱ \to$$

$$\to \sin ۳x = ۱ \to ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

$k=۰ \to \frac{\pi}{۶}$

$k=۱ \to \frac{۲\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۵\pi}{۶}$

$k=۲ \to \frac{۴\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۳\pi}{۲}$

$$\to \frac{\pi}{۶} + \frac{۵\pi}{۶} + \frac{۳\pi}{۲} = \boxed{\frac{۵\pi}{۲}}$$ ✓

⑤

۴-

$$\frac{۱}{\sin\left(\frac{\pi + ۴x}{۲}\right)} + \frac{۱}{\cos\left(\frac{\pi + ۸x}{۲}\right)} = ۰$$

$\to \sin\left(\frac{\pi}{۲} + ۲x\right) = \cos ۲x$

$\to \cos\left(\frac{\pi}{۲} + ۴x\right) = -\sin ۴x$

$$\to \frac{۱}{\cos ۲x} - \frac{۱}{\sin ۴x} = ۰ \to$$

⑤

$$\to \frac{۱}{\cos ۲x} = \frac{۱}{\sin ۴x} \longrightarrow \sin ۴x = \cos ۲x \to ۲\sin ۲x \cos ۲x = \cos ۲x \to ۲\sin ۲x \cos ۲x - \cos ۲x = ۰ \to$$

$$\to \cos ۲x (۲\sin ۲x - ۱) = ۰$$

$\to \cos ۲x = ۰ \to$ غ ق ق ← چون مخرج را صفر می‌کند

$\to \sin ۲x = \frac{۱}{۲}$

- $\to ۲x = \frac{\pi}{۶} \to x = \frac{\pi}{۱۲}$
- $\to ۲x = \frac{۵\pi}{۶} \to x = \frac{۵\pi}{۱۲}$

$$\longrightarrow \alpha = \frac{۵\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۳}$$

$$\tan ۲\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \tan \frac{۲\pi}{۳} = -\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \boxed{-\sqrt{۳}}$$ ✓

ـ۵ $m(\cos x - \sin x) - ۳\sqrt{۶}\sin(۲x) = \sqrt{۶}$, if $\cos(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ $m = ?$

$\cos(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \to \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$

$(\cos x - \sin x)^۲ = \frac{۲}{۳} \to ۱ - ۲\sin x\cos x = \frac{۲}{۳} \to ۱ - \sin ۲x = \frac{۲}{۳} \to \sin ۲x = \frac{۱}{۳}$ ۲

$\sqrt{\frac{۲}{۳}}\, m - \frac{۳\sqrt{۶}}{۳} = \sqrt{۶} \to \sqrt{\frac{۲}{۳}}\, m = ۲\sqrt{۶} \to \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} m = ۲\sqrt{۶} \to \boxed{m = ۶}$ ✓

ـ۶ $\sin(x+\frac{\pi}{۶})\underbrace{\cos(x-\frac{\pi}{۳})}_{\cos(\frac{\pi}{۳}-x)} = ۱ \longrightarrow x+\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}-x = \frac{\pi}{۲} \to$ دو کمان متمم هستند $\to \sin\alpha = \cos\beta$

۲

$\to \sin(x+\frac{\pi}{۶}) = \cos(x-\frac{\pi}{۳}) \to \cos^۲(x-\frac{\pi}{۳}) = ۱ \to \cos(x-\frac{\pi}{۳}) = \pm ۱$

$\to \cos(x-\frac{\pi}{۳}) = ۱ \to x-\frac{\pi}{۳} = ۲k\pi \to x = ۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{k=۰} \boxed{\frac{\pi}{۳}}$ ✓ ← ۲ جواب دارد

$\to \cos(x-\frac{\pi}{۳}) = -۱ \to x-\frac{\pi}{۳} = ۲k\pi+\pi \to x = ۲k\pi+\frac{۴\pi}{۳} \xrightarrow{k=۰} \boxed{\frac{۴\pi}{۳}}$ ✓

ـ۷ $\sin x + \sqrt{۳}\cos x = \sqrt{۲} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۱}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \cos\frac{\pi}{۳}\sin x + \sin\frac{\pi}{۳}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \to$

$\to \sin(x+\frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۴}$

$\to x+\frac{\pi}{۳} = ۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \to x = ۲k\pi-\frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۰} \boxed{-\frac{\pi}{۱۲}}$, $\xrightarrow{k=۱} \boxed{\frac{۲۳\pi}{۱۲}}$

$\to x+\frac{\pi}{۳} = ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} \to x = ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۰} \boxed{\frac{۵\pi}{۱۲}}$

$-\frac{\pi}{۱۲} + \frac{۲۳\pi}{۱۲} + \frac{۵\pi}{۱۲} = \frac{۲۷\pi}{۱۲} = \boxed{\frac{۹\pi}{۴}}$ → جواب ✓ ۲

ـ۸ $۴\sin x\,\underbrace{\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)}_{-\cos x} = ۱ \to -۴\sin x\cos x = ۱ \to \sin x\cos x = -\frac{۱}{۴} \to \frac{۱}{۲}\sin ۲x = -\frac{۱}{۴} \to$

۲

$\to \sin ۲x = -\frac{۱}{۲}$

$\to ۲x = ۲k\pi-\frac{\pi}{۶} \to x = k\pi-\frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۱} \boxed{\frac{۱۱\pi}{۱۲}}$, $\xrightarrow{k=۲} \boxed{\frac{۲۳\pi}{۱۲}}$

$\to ۲x = ۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶} \to x = k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۰} \boxed{\frac{۷\pi}{۱۲}}$, $\xrightarrow{k=۱} \boxed{\frac{۱۹\pi}{۱۲}}$

$\frac{۱۱\pi}{۱۲} + \frac{۲۳\pi}{۱۲} + \frac{۷\pi}{۱۲} + \frac{۱۹\pi}{۱۲} = \boxed{۵\pi}$ ✓

-۹

$$\underbrace{(۱+\cos(۲\alpha))}_{۲\cos^۲\alpha}\underbrace{(۱+\cos(۴\alpha))}_{۲\cos^۲ ۲\alpha}\underbrace{(۱+\cos(۸\alpha))}_{۲\cos^۲ ۴\alpha}=\frac{۱}{۸}$$

$$۸\cos^۲\alpha\cos^۲ ۲\alpha\cos^۲ ۴\alpha=\frac{۱}{۸}\rightarrow\cos\alpha\cos۲\alpha\cos۴\alpha=\pm\frac{۱}{۸}\xrightarrow[\text{طرفین ضربدر } ۸\sin\alpha]{\sin\alpha\neq 0}\underbrace{\overbrace{\overbrace{۸\sin\alpha\cos\alpha}^{۴\sin۲\alpha}\cos۲\alpha}^{۲\sin۴\alpha}\cos۴\alpha}_{\sin۸\alpha}=\pm\sin\alpha$$

$\rightarrow \sin۸\alpha=\pm\sin\alpha$

$\rightarrow \alpha=\frac{۲k\pi}{۷}\xrightarrow{k=۳}\frac{۶\pi}{۷}$

$\rightarrow \alpha=\frac{۲k\pi}{۹}\xrightarrow{k=۴}\frac{۸\pi}{۹}$

$\rightarrow \alpha=\frac{۲k\pi}{۷}+\frac{\pi}{۷}\xrightarrow{k=۲}\frac{۴\pi}{۷}$

$\rightarrow \alpha=\frac{۲k\pi}{۹}+\frac{\pi}{۹}\xrightarrow{k=۳}\frac{۷\pi}{۹}$

• k را مقداری قرار دهیم که جواب برابر با π نشود چون $\sin\alpha\neq 0$ است

$\rightarrow \max=\boxed{\frac{۸\pi}{۹}}$ ← جواب

✓

④

-۱۰

$$\tan(۳x)\tan(x)=۱\rightarrow\tan۳x=\frac{۱}{\tan x}\rightarrow\tan۳x=\cot x\rightarrow\tan۳x=\tan\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x\rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}$$

$\xrightarrow{k=۴}\boxed{\frac{۹\pi}{۸}}$

$\xrightarrow{k=۵}\boxed{\frac{۱۱\pi}{۸}}$

$\xrightarrow{k=۶}\boxed{\frac{۱۳\pi}{۸}}$

$\xrightarrow{k=۷}\boxed{\frac{۱۵\pi}{۸}}$

$$\frac{۹\pi}{۸}+\frac{۱۱\pi}{۸}+\frac{۱۳\pi}{۸}+\frac{۱۵\pi}{۸}=\boxed{۶\pi}$$ ← جواب

✓

④