

۲۰

تکالیف حتماً حقیقی
اگر $g(x) = ((t, m), (n, p+1), (p+1, -1), (-1, p+k))$ تابع ثابت و $f(x) = (x+1)' + (2x-1)' + mx' + nx + mn$ تابع باشد، حاصل $m+n+p+k$ را بیابید.

-1

۱) $f(x) = k$ زیرا ثابت $\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1 + 9x^2 + 1 - 4x + mx^2 + nx + mn$

$(10+m)x^2 + (n-4)x + 2+mn = 0 \Rightarrow m = -10$
 $\Rightarrow n = 4$

۲) جواب

$(x, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = 4x$
 $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = 4x$
 $g(x) \Rightarrow (f, p+1) = (f, p+1)$
 $p+1 = -10 \Rightarrow p = -11$
 $g(x) \Rightarrow (-9, -1) = (-9, -11+k)$
 $-1 = -11+k \Rightarrow k = 10$

$m+n+p+k = -10 + 4 - 11 + 10 = -7$

۲

الف) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x^2-2x-8}}$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x-4)(x+2) = 0$
 $x = 4$ یا $x = -2$

$\frac{-2}{-1} + \frac{2}{1} = 0$

$D_f = (-2, +\infty) - \{2\}$

-2

۲

ب) $f(x) = \frac{2x^2+1}{4-2[-x]}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
 $4-2[-x] = 0 \Rightarrow -2[-x] = -4 \Rightarrow x = 2$
 $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

الف) $f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$
 $x \geq 0$

$\frac{-1}{-1} + \frac{1}{1} = 0$

$D_f = [1, +\infty)$

-3

۲

ب) $f(x) = \frac{\sqrt{|x-2|-x^2}}{|x|-1}$
 $|x-2|-x^2 \geq 0$
 $-x^2 + x - 2 \geq 0$
 $x^2 - x + 2 \leq 0$
 $x = 1$ یا $x = 2$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow -2 < x < 1 - \frac{1}{2}$
 $D_f = (-2, 1) - \{2\}$

دامنه‌ی تابع $y = \frac{1}{||x-2|-1|-k}$ شامل ۳ عدد صحیح نیست. مقدار k را بیابید.

-4

$|x-2|-1 = 1 \Rightarrow x-2 = 2 \Rightarrow x = 4$
 $|x-2|-1 = -1 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$|x-2|-1 = k \Rightarrow x-2 = k+1 \Rightarrow x = k+3$
 $|x-2|-1 = -k+1 \Rightarrow x-2 = -k+1 \Rightarrow x = -k+3$
 $k = x-1$
 $k = -x+3$

$-x+1 = x-3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$
 $k = -1$

$|x-2| = 0 \Rightarrow x = 2$
 $D_f = \mathbb{R} - \{2, 0, 4\}$

$x-1 = -x+3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow k = 1$

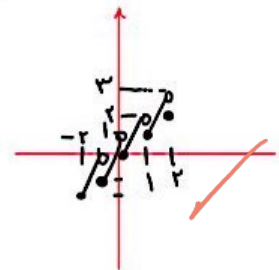
تقریب
زیرا

۲

-5

مودار تابع $y = 2x - [x]$ را در بازه‌ی $[-2, 2]$ رسم کنید.

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \quad y = 2x + 2 \rightarrow x = -2 \quad y = -2$
 $-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \quad y = 2x + 1 \rightarrow x = -1 \quad y = -1$
 $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \quad y = 2x \rightarrow x = 0 \quad y = 0$
 $1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \quad y = 2x - 1 \rightarrow x = 1 \quad y = 1$
 $x = 2 \Rightarrow y = 2 \quad x = 2 \quad y = 2$



2

-6

اگر $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + a} + b$ یک تابع همانی باشد، مجموعه مقادیرهای $a - b$ کدام است؟
 $f(x) = x$

$$\frac{(x-2)(x-1)}{x+a} + b = x$$

مقادیر $a = -1 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} + b = x \Rightarrow b = 2 \quad a - b = -1 - 2 = -3$

مقادیر $a = -2 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} + b = x \Rightarrow b = 1 \quad a - b = -2 - 1 = -3$

2

-7

توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} & ; x \neq \pm 1 \\ \frac{ax + 1}{x + b} & ; x = \pm 1 \end{cases}$ و $g(x) = x + c$ برابر باشند، حاصل $b + c$ چقدر است؟

برای $x = 1$ (جمع ضرایب صفر) $x^3 + 2x^2 - x - 2 \div x - 1$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline 3x^2 - x - 2 \\ -3x^2 + 3x \\ \hline 2x - 2 \\ -2x + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+2)}{(x-1)}$
 $\frac{(x+2)}{(x-1)} = x + 2 = g(x) = x + c \Rightarrow c = 2$

$g(1) = 1 + 2 = 3$
 $g(-1) = -1 + 2 = 1$

$\frac{a+2}{1+b} = 3 \quad a+2 = 3+3b$
 $\frac{-a+2}{-1+b} = 1 \quad -a+2 = b-1$
 $a+b = 3$

$a - 3b = 1$
 $a + b = 3$
 $\Rightarrow b = +2$
 $b = +\frac{1}{2}$

$b + c = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

2

2

اگر $f(x) = \sqrt{b - 2x} + 2k$ و $g(x) = \sqrt{2x - 3a} + k - 1$ داشته باشیم و مقدار $2f(1, k) - g(1, k)$ مقدار $3a - \frac{b}{2} - k$ باشد، آنوقت k چه مقداری می‌گیرد؟

$2\sqrt{2-2} + 2k - 2 - \sqrt{2-3a} - k + 1 = 3a - \frac{b}{2} - k$
 $2k - 2 - \sqrt{2-3a} - k + 1 = 3a - \frac{b}{2} - k$
 $k - 1 - \sqrt{2-3a} = 3a - \frac{b}{2} - k$
 $2k = 3a - \frac{b}{2} + 1$

$3a - \frac{b}{2} - k = 2 - 2 + 1 = 1$

برای دو تابع $f(x) = \sqrt{m-x} + n$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ اگر $D_{f+g} = [-1, 7]$ و $f-g(x) = 4\sqrt{2}$ حاصل $m+n$ کدام است؟ 9

$D_f \cap D_g \Rightarrow x \geq -1 \cap ? = -1 \leq x \leq 7$

$0 \leq x \leq 7$

$$f(x) - g(x) = \sqrt{7-x} + n - \sqrt{x+2} = 4\sqrt{2}$$

$n = 8\sqrt{2} - 7$ ✓

$m+n = 7 + 8\sqrt{2} - 7 = 8\sqrt{2}$ ✓

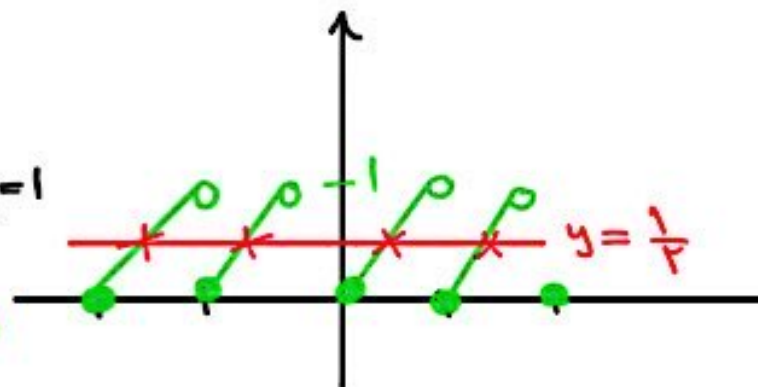
2

معادله‌ی مقابل در بازه‌ی $[-2, 2]$ چند جواب دارد (در تعداد جواب از رسم کمک بگیرید).

(جواب)

$$y = (-1)^x (x - [x]) = \frac{1}{x}$$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \quad x+2=y \Rightarrow x=-1, y=1$
 $-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \quad x+1=y \Rightarrow x=0, y=1$
 $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \quad x=y \Rightarrow x=1, y=1$
 $1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \quad x-1=y \Rightarrow x=2, y=1$
 $x=2 \Rightarrow y=0$



4