حسابان - ۱۲ دفترچه A

① $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x-5}{x^2+ax+b}=-\infty \xrightarrow{\text{مخرج}=0} 4+2a+b=0 \rightarrow b=-4-2a$

$\rightarrow \frac{-1}{x^2+ax+b}$ ← x^2+ax+b باید همواره + شود پس $\Delta=0$ است $\rightarrow a^2-4b=0$

$a^2+8a+16=0$

$\Delta \Rightarrow 16-16=0 \xrightarrow[\frac{-b}{2a}=\text{ریشه}]{\Delta=0} \frac{-b}{2a}=\frac{-8}{2}=-4 \rightarrow \boxed{a=-4}$ و $\boxed{b=4} \xrightarrow{a+b}$ ⓪

---

⑤ $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]} \xrightarrow{x=2} \frac{4-4}{8-8}=\frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{[8^+]=8} \frac{x^2-4}{x^3-8}$

$\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2+4+2x)} = \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+2}{x^2+4+2x} \xrightarrow{x=2} \frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

---

⑥ $\lim\limits_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{x=-8} \frac{+64-80+16}{12-12}=\frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \frac{2x+10}{0+\frac{6}{3\sqrt[3]{x^2}}}$

$\xrightarrow{x=-8} \frac{-6}{\frac{1}{\frac{6}{12}}} = -12$ / روش نهایی $= \frac{x^2+10+16}{12+6\sqrt[3]{x}} \times \frac{144+36\sqrt[3]{x^2}+72\sqrt[3]{x}}{144+36\sqrt[3]{x^2}+72\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[\text{کردن}]{\text{جبر ساده}} -8$

---

⑦ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} \xrightarrow{x=0} \frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{\times\text{مزدوج}} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+x}}$

$\rightarrow \frac{\cancel{2}+3x-\cancel{2}+x}{\sqrt{1-\cos x}\times(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+x})} \xrightarrow{x=0} 2\sqrt{2}$

$\xrightarrow{\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}} \frac{4x}{\left(\sqrt{1-1+\frac{x^2}{2}}\right)(2\sqrt{2})} \rightarrow \frac{4x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}\times 8}} = \frac{4x}{|2x|} = \frac{4x}{-2x} = -2$

$\sqrt{4x^2}=|2x|$ $\quad x\to 0^- \quad \hookrightarrow -2x$

---

⑧ ① چون مخرج صفر شده و حاصل حد عدد پس صورت هم باید صفر باشد تا حد $\frac{0}{0}$ ایجاد شود

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{k+\cos(\sqrt{a}x)}{kx^2}=3 \rightarrow$

① $k+\cos(0)=0 \quad k+1=0 \quad \boxed{k=-1}$

② $\xrightarrow{\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}} \frac{k+1-\frac{ax^2}{2}}{kx^2} \rightarrow \frac{-1+1-\frac{ax^2}{2}}{-x^2}$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax^2}{2x^2}=3 \xrightarrow[\text{وجواب را صفر قرار نمی‌دهیم}]{\text{هوپیتال نمی‌بریم}} \frac{2a\cancel{x}}{4\cancel{x}}=3 \quad \boxed{a=6} \rightarrow \frac{a}{k}=\boxed{-6}$

۲

$$\lim_{x\to \sqrt[3]{4}} \frac{a}{x^2+ax+b} = +\infty$$

مخرج حتما صفر می‌شود پس $\sqrt[3]{4}$ ریشه مضاعف است

$\frac{-b}{2a} \to \frac{-a}{2} = \sqrt[3]{4}$ $a=-2\sqrt[3]{4}$

$\to x^2-2\sqrt[3]{4}x+b \to$ باید تابع به فرم مضاعف نوشته بشه یعنی $(x-\sqrt[3]{4})^2$ $\to x^2-2\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16} \to$ $b=\sqrt[3]{16}$

$$\left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{\sqrt[3]{16}}{-2\sqrt[3]{4}}\right]\to\left[\frac{2\sqrt[3]{2}}{-2\sqrt[3]{4}}\right]=\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]=-1$$

۹

$$\lim_{x\to 3a^+}\frac{2\sqrt{x-3a}+3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}} \to \frac{2\sqrt{x-3a}+3(\sqrt{x}-\sqrt{3a})}{\sqrt{x-3a}\times\sqrt{x+3a}} \xrightarrow{\text{تفکیک}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{x+3a}}+\frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{3a})}{\sqrt{x-3a}\cdot\sqrt{x+3a}} \xrightarrow[\text{مزدوج}]{\times} \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{3a})}{\sqrt{x-3a}\cdot\sqrt{x+3a}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3a}}{\sqrt{x}+\sqrt{3a}}=\frac{3(x-3a)}{\sqrt{x-3a}\cdot\sqrt{x+3a}(\sqrt{x}+\sqrt{3a})}$$

$$\lim_{x\to 3a^+}\frac{2}{\sqrt{x+3a}}+\frac{3(x-3a)}{\sqrt{x-3a}\cdot\sqrt{x+3a}(\sqrt{x}+\sqrt{3a})}\xrightarrow{x=3a}\frac{2}{\sqrt{6a}}=\sqrt{\frac{4}{6a}}=\sqrt{\frac{2}{3a}}$$

۱۵

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-k[x]}{x^2-1}=-\infty$$

-1^+: $\frac{1+k}{x^2-1}\to\frac{1+k}{0^-}=-\infty\to 1+k>0$ $k<-1$

-1^-: $\frac{1+2k}{x^2-1}\to\frac{1+2k}{0^+}=-\infty$ $1+2k<0$ $k<-\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{\cap} -1<k<-\frac{1}{2} \to (k\pi, \cos k\pi)$

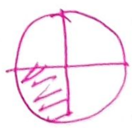
$-1<k<-\frac{1}{2}$

$\boxed{-\pi<k\pi<-\frac{\pi}{2}}$

$-\pi<k\pi<-\frac{\pi}{2}$

$\cos-\pi<\cos k\pi<\cos-\frac{\pi}{2}$

$\boxed{-1<\cos k\pi<0}$

$\to$  $\to$ ناحیه ۳

۳

$$\lim_{x\to(\frac{1}{\sqrt{3}})^+}\frac{[-x]+a}{|\frac{\sqrt{3}}{3}x+a|+a}=-\infty$$

$\sqrt{3}\simeq 1.7 \to [-\frac{10}{17}]=-1$ $\frac{a-1}{|\frac{1}{3}+a|+a}\xrightarrow{\text{مخرج}=0}|\frac{1}{3}+a|=-a$

① $\frac{1}{3}+a=-a$ $\boxed{a=-\frac{1}{6}}$

② $-\frac{1}{3}-\cancel{a}=-\cancel{a}$ × $[-\frac{1}{6}]=-1$