تکلیف شماره (۲۰) — پرنیان شمشیری - دوازدهم دفتر A

۱)

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty \begin{cases} 2^+:\ \lim\frac{-1}{4+2a+b}=-\infty \to x^2+ax+b=0^+ \ (x\to 2^+)\\ 2^-:\ \lim\frac{-1}{4+2a+b}=-\infty \to x^2+ax+b=0^+ \ (x\to 2^-)\end{cases}$$

$$\to (x-2)^2=x^2-4x+4=x^2+ax+b$$

$$\to a=-4\ ,\ b=4 \Rightarrow a+b=-4+4=0$$

---

۲)

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{4}}\frac{x}{x^2+ax+b}=+\infty \begin{cases} 2^{\frac{2}{3}+}:\ \frac{2^{\frac{2}{3}}}{0^+}=+\infty\\ 2^{\frac{2}{3}-}:\ \frac{2^{\frac{2}{3}}}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow$ فرض : $(x-2^{\frac{2}{3}})^2=x^2+2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{5}{3}}x=x^2+ax+b$

$$\to a=-2^{\frac{5}{3}}\ ,\ b=2^{\frac{4}{3}}$$

$$\to \left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{2^{\frac{4}{3}}}{-2^{\frac{5}{3}}}\right]=\left[-2^{-\frac{1}{3}}\right]=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{-2}}\right]=-1$$

---

۳)

$$\lim_{x\to(\frac{1}{\sqrt{3}})^+}\frac{[-x]+a}{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}x+a\right|+a}=-\infty \Rightarrow \lim\frac{\left[\frac{-\sqrt{3}}{3}\right]+a}{\left|\frac{1}{3}+a\right|+a}=-\infty \Rightarrow \lim\frac{-1+a}{\ }$$

---

۴)

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x-\left[\frac{-2}{x^2}\right]}{24x+\left[\frac{3}{x^2}\right]}=\frac{(-8)^+-[(-8)^-]}{(-12)^++[12^+]}=\frac{(-8)^+-(-9)}{(-12)^++12}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

* $x>-\frac{1}{2}\to 16x>-8$
* $x>-\frac{1}{2}\to x^2<\frac{1}{4}\to\frac{2}{x^2}>8\to\frac{-2}{x^2}<-8$
* $x>-\frac{1}{2}\to 24x>-12$
* $x>-\frac{1}{2}\to x^2<\frac{1}{4}\to\frac{3}{x^2}>12$

---

۵)

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[8^+]}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2+4+2x)}=\frac{4}{4+4+4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

---

۶)

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{64-80+16}{12-12}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{(x+8)(x+2)}{6(2+\sqrt[3]{x})}\times\frac{(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}$$

$$=\frac{\cancel{(x+8)}(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6\ \cancel{(8+x)}}=\frac{(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6}=\frac{(-6)(4+4+4)}{6}=\frac{-6\times 12}{6}=\boxed{-12}$$

---

۷)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-1}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\frac{(2+3x)-(2-x)}{\sqrt{1-\cos x}\cdot(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x})}=\frac{4x}{\sqrt{2}\ 2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$