Subject:
Year. Month. Date.

۲۰

مریم توکلی دوازدهم ۸صبح تکلیف ۲۱

سوال ۱)

$$\left|2a^3+(m-4)a^2+a^2\right|=0$$ در پیوسته است $\Rightarrow$ $0=$ یعنی صورت مخرج $\Leftarrow a$ در

$\Rightarrow a^2(2a+m-3)=0$

$a=0 \qquad 2a=3-m \Rightarrow m=3-2a$

$\sqrt{4a^2+(m+5)a+\frac{m}{2}}=0 \rightarrow 4a^2+(8-2a)a+\frac{3-2a}{2}=0$

$\Rightarrow 4a^2+4a+1=0 \rightarrow (2a+1)^2=0 \rightarrow a=-\frac{1}{2} \; , m=4$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{4x^2+4x+\frac{3}{2}}}{\left|2x^3+\frac{1}{4}\right|}=\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\cancel{|2x+1|}}{\cancel{2|x+\frac{1}{2}|}\left|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right|}$

۲

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right|}=\dfrac{2\tan b}{\sqrt{-x}} \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{2\tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$\rightarrow \tan b=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{b=\frac{\pi}{6}}$

$ax^2-ax+b=0 \qquad f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} \qquad \left[\frac{b-2a}{3}\right]$ سوال ۲)

مخرج ریشه دارد پیوسته نیست $\rightarrow x=1 \rightarrow 1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1$

$5x^2-ax+b=0 \xrightarrow{x=1} 5-a+b=0 \rightarrow b-a=-5$

$\rightarrow b=-3 \quad a=2$

$\left[\frac{b-2a}{3}\right]=\left[\frac{-3-4}{3}\right]=\left[-\frac{7}{3}\right]=\boxed{-3}$

۲

آپادانا

Subject:
Year. Month. Date.

سوال ۳) $ab = ?$

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{\tan\left((2x+1)\pi\right)}{4} & x \le 1 \\ \dfrac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} & 1 < x < 5 \\ b(x-[-x]) & x \ge 5 \end{cases}$$

پیوسته در بازه $[1,5]$

۲

$$\frac{|(x+2)(x-1)|}{a(1-x)} \qquad \begin{array}{c} -2 \quad 1 \\ + \mid - \mid + \end{array}$$

$$\longrightarrow \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{a\cancel{(1-x)}} = -\frac{x+2}{a} \quad \to \cancel{\tan}\frac{3\pi}{4} = -\frac{3}{a}$$

$$\to a = 3$$

$$x=5 \begin{cases} -\frac{7}{3} \\ b(5-(-5)) = 10b \end{cases} \longrightarrow -\frac{7}{3} = 10b \to b = \frac{-7}{30}$$

$$ab = 3\left(-\frac{7}{30}\right) = \boxed{-\frac{7}{10}}$$

سوال ۴) $f(x) = a[x+1] + b[x+[a+1]] \qquad \dfrac{a[a]}{f(a)} = ?$

$$\to f(x) = a[x] + a + b[x] + b[a] + b$$

۲

$$\xrightarrow{x \to 0^+} a + b[a] + b$$

$$\xrightarrow{0^-} -\cancel{a} + \cancel{a} - \cancel{b} + b[a] + \cancel{b}$$

$$\to a + b + \cancel{b[a]} = \cancel{b[a]} \to a+b=0 \to a=-b$$

$$f(a) = a[a] + a + b[a] + b[a] + b \to \cancel{a[a]} + \cancel{a} - \cancel{a[a]} - a[a] - \cancel{a}$$

$$\frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{-a[a]} = \boxed{-1} \qquad = -a[a]$$

Subject:
Year. Month. Date.

سوال ۵)

$f(x) = b[x^2 - ax] - 2a \qquad \frac{a}{f(b)} = ?$

$x^2 - ax \to x(x-a)$ ← اگر $a=0$ باشد تابع فقط در $b=0$ پیوسته خواهد بود که قبول نیست!

اگر $a\neq 0$ باشد، تابع در نقاط $x=0$ و $x=a$ ناپیوسته است و فقط با شرط $b=0$ پیوسته خواهد بود.

$\Rightarrow 0[x(x-a)] - 2a = -2a \qquad \frac{a}{f(b)} = \frac{a}{-2a} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

۲

سوال ۶)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+mx+n}{a-x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases} \qquad f(2a) = 0 \qquad n-m = ?$$

صورت بر $(x-2a)$ بخش پذیر است.

x^2+mx+n بر $(x-a)$ بخش پذیر است!

$\to \frac{(x-a)(x-2a)}{a-x} = -(x-2a) \xrightarrow[f(a)=2]{x=a} -(a-2a) = 2 \Rightarrow a=2$

$\underbrace{(x-a)}_{x-2}\underbrace{(x-2a)}_{x-4} = x^2 - 6x + 8 = x^2+mx+n \;\begin{cases} n=8 \\ m=-6 \end{cases}$

$n-m = 8-(-6) = \boxed{14}$

۲

سوال ۷)

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (3a^2-1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b\sin(\frac{\pi}{a}) & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \frac{a}{b} = ? \to \boxed{2}$$

$x = 0^+ \to (1-a)(0) + (3a^2-1)(-1) = 1-3a^2$

$x = 0 \Rightarrow b\sin(\frac{\pi}{a})$

$x = 0^- \Rightarrow (1-a)(-1) + (3a^2-1)(0) = a-1$

$\to a-1 = 1-3a^2 \Rightarrow 3a^2+a-2 \;\begin{cases} a=-1 & \text{غ ق ق} \\ a=+\frac{2}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$

$\to a = \frac{2}{3} \to b\sin(\frac{\pi}{a}) = b\sin(\frac{3\pi}{2}) = -b \qquad -b = \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

۲

آپادانا

سوال ۸)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2+mx-m-1|}{m|x^2-1|+|x-1|} & x \neq 1 \\ \dfrac{m}{m+2} & x=1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to \frac{1}{m}} f(x) = ?$$

۲

$$x^2+mx-m-1 \xrightarrow{x-1 \text{ تقسیم بر}} (x-1)(x+(m+1))$$

$$\frac{\cancel{|x-1|}\,(x+(m+1))}{\cancel{|x-1|}\,(m|x+1|+1)} = \frac{|x+m+1|}{(m|x+1|+1)} \xrightarrow{x=1} \frac{|m+2|}{2m+1} = \frac{m}{m+2}$$

$$\rightarrow m<-2 \Rightarrow -m^2-4m-4 = 2m^2+m \Rightarrow 3m^2+5m+4=0 \Rightarrow \Delta<0 \quad \times$$

$$\rightarrow m>-2 \Rightarrow m^2+4m+4 = 2m^2+m \Rightarrow m^2-3m-4=0 \rightarrow (m-4)(m+1)=0$$

$$m=4 \qquad \cancel{m=-1}$$

$$m=4 \rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{\frac{1}{4}+4+1}{4(\frac{5}{4})+1} = \frac{\frac{21}{4}}{6} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

یا غلط

$$m=-1 \rightarrow \frac{1}{m} = -1 \rightarrow \frac{|-1-1+1|}{-1(-1+1)+1} = \cancel{\frac{+1}{1}} = \cancel{\boxed{1}}$$

سوال ۹)

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}\,|ax+a|}{|x^3+(m-2)x+a^2|} \qquad \mathbb{R}-\{a\} \text{ تعریف شده}$$

$$\rightarrow |-x-1| = |x+1|$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$

۲

ریشه مشترک صورت و مخرج $=a$

$$\sqrt{3}\,|a^2+a| = 0 \rightarrow a(a+1)=0 \; \begin{cases} a=0 & \text{غ ق ق} \\ a=-1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$a^3+(m-2)a+a^2=0$$

$$x+0=0 \quad x=-1$$

$$\rightarrow \cancel{-1}+\underbrace{(m-2)(-1)}_{2-m=0}+\cancel{1}=0 \quad \rightarrow \underline{m=2}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{3}\,|-x-1|}{|x^3+(2-2)x+1|} = \frac{\sqrt{3}\,|x+1|}{|x^3+1|} \rightarrow \frac{\sqrt{3}\,\cancel{|x+1|}}{\cancel{|x+1|}\,|x^2+1-x|} \xrightarrow{x=-1} \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Subject:
Year. Month. Date.

سوال ۱۰)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+|x|}{x^2+a|x|} & x \neq 0 \\ \dfrac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{a}} f(x) = ?$$

۲

$$\frac{\cancel{|x|}(|x|+1)}{\cancel{|x|}(|x|+a)} = \frac{|x|+1}{|x|+a} \xrightarrow{x=0} \frac{1}{a}$$

$$\to \frac{1}{a} = \frac{2a-1}{2a+2} \to 2a+2 = 2a^2-a \Rightarrow 2a^2-3a-2=0 \to a=2 \checkmark, \quad a=-\frac{1}{2} \checkmark$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

یا

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{2+1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = \boxed{2}$$