مریم توکلی دوازدهم A صبح تکلیف ۲۱

سوال ۱)

$|2a^3+(m-3)a^2+a^2|=0$ در یعنی صورت و مخرج $=0$ ⇐ در a پیوسته است

$\Rightarrow a^2(2a+m-2)=0$

$a=0 \qquad 2a=2-m \Rightarrow m=2-2a$

$\rightsquigarrow \sqrt{4a^2+(m+4)a+\frac{m}{2}}=0 \rightsquigarrow 4a^2+(6-2a)a+\frac{2-2a}{2}=0$

$\Rightarrow 4a^2+4a+1=0 \rightsquigarrow (2a+1)^2=0 \rightsquigarrow a=-\frac{1}{2} \;,\; m=3$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{4x^2+4x+\frac{3}{2}}}{|2x^3+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\cancel{|2x+1|}}{\cancel{2|x+\frac{1}{2}|}\,|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|}=\frac{2\tan b}{\sqrt{-x}} \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}}=\frac{2\tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$\rightsquigarrow \tan b=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{b=\frac{\pi}{6}}$

سوال ۲) $ax^2-ax+b=0 \qquad f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1} \qquad \left[\frac{b-2a}{3}\right]$

حد داشته ولی
پیوسته نیست $\rightsquigarrow x=1 \rightarrow 1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1$

$5x^2-ax+b=0 \xrightarrow{x=1} 5-a+b=0 \rightarrow b-a=-5$

$\rightarrow b=-3 \;,\; a=2$

$\left[\frac{b-2a}{3}\right]=\left[\frac{-3-4}{3}\right]=\left[-\frac{7}{3}\right]=\boxed{-3}$

Subject:
Year. Month. Date.

سوال ۳) $ab = ?$

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{\tan\big((2x+1)\pi\big)}{4} & x \le 1 \\ \dfrac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} & 1 < x < 5 \\ b\big(x-[-x]\big) & x \ge 5 \end{cases}$$

پیوسته در بازه $[1,5]$

$$\frac{|(x+2)(x-1)|}{a(1-x)} \qquad \begin{array}{c|c|c} & -2 & 1 \\ + & - & + \end{array}$$

$$\longrightarrow \frac{(x+2)\overset{-1}{\cancel{(x-1)}}}{a(\cancel{1-x})} = -\frac{x+2}{a} \quad \rightarrow \overset{-1}{\cancel{\tan\frac{3\pi}{4}}} = -\frac{3}{a}$$

$$\rightarrow \underline{a=3}$$

$$x=5 \begin{cases} -\dfrac{7}{3} \\ b\big(5-(-5)\big) = 10b \end{cases} \longrightarrow -\frac{7}{3} = 10b \rightarrow b = \frac{-7}{30}$$

$$ab = 3\left(-\frac{7}{30}\right) = \boxed{\frac{-7}{10}}$$

سوال ۴) $f(x) = a[x+1] + b\big[x + [a+1]\big] \qquad \dfrac{a[a]}{f(a)} = ?$

$$\rightarrow f(x) = a[x] + a + b[x] + b[a] + b$$

$$\xrightarrow{x \to 0^+} a + b[a] + b$$

$$\xrightarrow{0^-} -\cancel{a} + \cancel{a} - \cancel{b} + b[a] + \cancel{b}$$

$$\rightarrow a + b + \cancel{b[a]} = \cancel{b[a]}$$

$$\rightarrow a + b = 0 \rightarrow a = -b$$

$$f(a) = a[a] + a + b[a] + b[a] + b \rightarrow \cancel{a[a]} + \cancel{a} - \cancel{a[a]} - a[a] - \cancel{a}$$

$$= -a[a]$$

$$\frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{-a[a]} = \boxed{-1}$$

Subject:
Year. Month. Date.

سوال ۵)

$f(x) = b[\underbrace{x^2 - ax}_{x(x-a)}] - 2a \qquad \frac{a}{f(b)} = ?$

اگر $a=0$ باشد تابع فقط در $b=0$ پیوسته خواهد بود که قبول نیست!

اگر $a\neq 0$ باشد، تابع در نقاط $x=0$ و $x=a$ ناپیوسته است و با شرط $b=0$ پیوسته خواهد بود.

$\Rightarrow 0[x(x-a)] - 2a = -2a \qquad \frac{a}{f(b)} = \frac{a}{-2a} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

سوال ۶)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+mx+n}{a-x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases} \qquad f(2a)=0 \qquad n-m=?$$

صورت بر $(x-2a)$ نیز بخش پذیر است.

x^2+mx+n بر $(x-a)$ بخش پذیر است!

$\rightarrow \dfrac{\overset{-1}{\cancel{(x-a)}}(x-2a)}{\cancel{a-x}} = -(x-2a) \xrightarrow[f(a)=2]{x=a} -(a-2a) = 2 \Rightarrow a=2$

$\underbrace{(x-a)}_{x-2}\underbrace{(x-2a)}_{x-4} = x^2-6x+8 = x^2+mx+n \begin{cases} n=8 \\ m=-6 \end{cases}$

$n-m = 8-(-6) = \boxed{14}$

سوال ۷)

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (3a^2-1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b\sin(\frac{\pi}{a}) & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \frac{a}{b} = ? \rightarrow \boxed{2}$$

$x=0^+ \rightarrow (1-a)(0) + (3a^2-1)(-1) = 1-3a^2$

$x=0 \Rightarrow b\sin(\frac{\pi}{a})$

$x=0^- \Rightarrow (1-a)(-1) + (3a^2-1)(0) = a-1$

$\rightarrow a-1 = 1-3a^2 \Rightarrow 3a^2+a-2 \begin{cases} a=-1 & \text{غ ق ق} \\ a=+\frac{2}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$

$\rightarrow a=\frac{2}{3} \rightarrow b\sin(\frac{\pi}{a}) = b\sin(\frac{3\pi}{2}) = -b \qquad -b = \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

آپادانا

سوال ۱۸)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2+mx-m-1|}{m|x^2-1|+|x-1|} & x\neq 1\\[2mm] \dfrac{m}{m+2} & x=1\end{cases}\qquad \lim_{x\to \frac{1}{m}} f(x)=?$$

$$x^2+mx-m-1 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } x-1} (x-1)(x+(m+1))$$

$$\frac{\cancel{|x-1|}(x+(m+1))}{\cancel{|x-1|}(m|x+1|+1)}=\frac{|x+m+1|}{(m|x+1|+1)}\xrightarrow{x=1}\frac{|m+2|}{2m+1}=\frac{m}{m+2}$$

$$\to m<-2 \Rightarrow -m^2-4m-4=2m^2+m \Rightarrow 3m^2+5m+4=0 \Rightarrow \Delta<0 \ \times$$

$$\to m>-2 \Rightarrow m^2+4m+4=2m^2+m \Rightarrow m^2-3m-4=0 \to (m-4)(m+1)=0$$

$$m=4 \qquad m=-1$$

$$m=4 \to \frac{1}{m}=\frac{1}{4} \to \frac{\frac{1}{4}+4+1}{4(\frac{5}{4})+1}=\frac{\frac{21}{4}}{6}=\boxed{\frac{7}{8}}$$

$$m=-1 \to \frac{1}{m}=-1 \to \frac{|-1-1+1|}{-1(-1+1)+1}=\frac{+1}{1}=\boxed{1}$$

سوال ۱۹)

$$\to |-x-1|=|x+1|$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}\,|ax+a|}{|x^3+(m-2)x+a^2|}\qquad \mathbb{R}-\{a\}\ \text{تعریف شده}\qquad \lim_{x\to a} f(x)=?$$

ریشه مشترک صورت و مخرج $=a$

$$\sqrt{3}|a^2+a|=0 \to a(a+1)=0 \begin{cases} a=0 & \text{غ ق ق}\\ a=-1 & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$a^3+(m-2)a+a^2=0$$

مخرج $=0$، $x=-1$

$$\to -\cancel{1}+(m-2)(-1)+\cancel{1}=0 \qquad 2-m=0 \to \underline{m=2}$$

$$\to f(x)=\frac{\sqrt{3}|-x-1|}{|x^3+(2-2)x^2+1|}=\frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3+1|}\to\frac{\sqrt{3}\cancel{|x+1|}}{\cancel{|x+1|}\,|x^2+1-x|}\xrightarrow{x=-1}\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Subject:
Year. Month. Date.

سوال ۱۰)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+|x|}{x^2+a|x|} & x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{a}} f(x) = ?$

$$\frac{\cancel{|x|}(|x|+1)}{\cancel{|x|}(|x|+a)} = \frac{|x|+1}{|x|+a} \xrightarrow{x=0} \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow \frac{1}{a} = \frac{2a-1}{2a+2} \Rightarrow 2a+2 = 2a^2-a \Rightarrow 2a^2-3a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \checkmark \\ a=-\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}+1}^{\frac{3}{2}}}{\underbrace{\frac{1}{2}+2}_{\frac{5}{2}}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

یا

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{\overbrace{2+1}^{3}}{\underbrace{2-\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}}} = \boxed{2}$$