نگین نکوئی — تکلیف شماره ۲۱ — دوازدهم افتخار A

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{9x^2+(m+3)x+\frac{m}{2}}}{|2x^3+(m-3)ax^2+ax^2|} & x\neq a\\[2ex] \dfrac{2\tan b}{\sqrt{-x}} & x=a\end{cases}$$

۱- صورت و مخرج باید صفر باشد

$$2a^3+(m-3)a^2+a^2=0$$

$$2a^3+ma^2-2a^2=0$$

$$2a^3=2a^2-ma^2 \quad a\neq 0 \text{ چون در مخرج است}$$

$$2a=2-m$$

$$m=2-2a$$

$$9a^2+(5-2a)a+\frac{2-2a}{2}=0$$

$$6a^2+5a-2a^2+1-a=0 \rightarrow 4a^2+4a+1=0$$

$$a^2+4a+4=0$$

$$(a+2)^2=0 \rightarrow a=-2 \xrightarrow[\text{بر ۴}]{\text{تقسیم}} a=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$m=3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{9x^2+\cancel{6}x+\frac{3}{2}}}{|2x^3+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,|\cancel{1\cdot 2x+1}|^{2}}{\cancel{2}\,|\cancel{2x+\frac{1}{2}}|\,|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|}=\frac{2\tan b}{\sqrt{x}}\xrightarrow{x=-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}}=\frac{2\tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\Rightarrow \tan b=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b=\frac{\pi}{6}$$

۲- $5x^2-ax+b=0 \xrightarrow{x=1} 5-a+b=0$

$(a+2)^2=0 \to a=-2 \xrightarrow{\frac{-2}{4}} a=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{4x^2+\cancel{4}x+\frac{3}{4}}}{|2x^2+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}\,\cancel{|2x+1|}}{\cancel{2}\,\cancel{|x+\frac{1}{2}|}\,|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|}=\frac{2\tan b}{\sqrt{x}}\xrightarrow{x=-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}=\frac{2\tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\Rightarrow \tan b=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$b=\frac{\pi}{6}$

-۲

$5x^2-ax+b=0 \xrightarrow{x=1} 5-a+b=0$

$a-b=5$

$$\lim \frac{x^2+ax+b}{x-1}$$

$1+a+b=0$

$a+b=-1$

$a-b=5$

$a=2 \to b=-3$

$$\left[\frac{b-2a}{2}\right]=\left[\frac{-3-4}{2}\right]=-4$$

۳ـ در نقاط مرزی حل می‌کنیم

$$f(x)\begin{cases}\tan\frac{(2x+1)\pi}{4} & x\leq 1\\ \frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} & 1<x<5\\ b(x-[-x]) & x\geq 5\end{cases}$$

$x\leq 1 \to \tan\frac{3\pi}{4}=-1$

$$\frac{|(x+2)(x-1)|}{a(1-x)}=\frac{\overset{3}{(x+2)}\overset{-1}{\cancel{(x-1)}}}{a\,\cancel{(1-x)}}=-x=-1$$

$a=3$

$+\ \ -2\ \ -\ \ 1\ \ +$

$$\xrightarrow{x=5} \frac{(x+2)\overset{-1}{\cancel{(x-1)}}}{3\,\cancel{(1-x)}}=\frac{-1(7)}{3}$$

$\xrightarrow{x\to 5^+} b(x-(-6))$

$b(\underbrace{x+6}_{11})=-\frac{7}{3} \to 11b=-\frac{7}{3}$

$b=-\frac{7}{33}$

$$ab=-\frac{7}{33}\times-\frac{7}{3}=\frac{49}{99}$$

۴ -

$$a[x+1] + b[x+[a+1]]$$

$$= a[x] + a + b[x] + b[a] + b \xrightarrow{x \to 0^+} a + \cancel{b[a]} + \cancel{b}$$

$$\xrightarrow{x \to 0^-} \cancel{-a} + \cancel{a} - b + \cancel{b[a]} + \cancel{b}$$

$$a = -b$$

$$-a = b$$

$$\frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{\cancel{a[a]} + \cancel{a} \cancel{a[a]} + a[a] + \cancel{a}} = \frac{a[a]}{-a[a]} = -1$$

۵ - برای اینکه پیوسته باشد حد آن صفر باشد.

$$f(x) = b[x^2 - ax] - 2a \qquad f(a) = -2a$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$$

۶ -

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + mx + n}{a - x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases}$$

$\longrightarrow$ مخرج $= 0$: صورت $= 0$:

$$a^2 + ma + n = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{H}OP \Rightarrow \frac{2x+m}{-1} = \frac{2a+m}{-1} = 2$$

$$2a + m = -2$$

$$m = -2 - 2a$$

$$a^2 + ma + n = 0$$

آن صفر باشد.

$\Rightarrow b = 0$

$$\frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$$

---

۶ -

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + mx + n}{a - x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases}$$

$\longrightarrow$ مخرج $= 0$، صورت $= 0$: $\quad a^2 + ma + n = 0$

$\Rightarrow \text{HOP} \Rightarrow \dfrac{2x + m}{-1} = \dfrac{2a + m}{-1} = 2$

$2a + m = -2$

$m = -2 - 2a$

$f(2a) = 0$

$a^2 + ma + n = 0$

$a^2 + (-2 - 2a)(a) + n = 0$

$\underline{a^2} - 2a - 2a^2 + n = 0$

$-a^2 - 2a + n = 0$

$n - m = ? \quad 8 - (-6) = 14$

$$f(2a) \Rightarrow \frac{4a^2 + m(2a) + n}{a - 2a} = \frac{4a^2 + (-2 - 2a)(2a) + n}{a - 2a} = 0$$

$-a^2 + 2a = 0$

$a(-a + 2) = 0$ غیرقابل قبول

$a = 2$

$\rightarrow$ صورت $= 0$

$\cancel{4a^2} - 4a - \cancel{4a^2} + n$

$-4a + n = 0$

$n = 4a$

$m = -2 - 2(2)$

$m = -6$

$n = 8$

---

۷ -

$$f(x) = \begin{cases} (1 - a)[x] + (3a^2 - 1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$x \to 0^+ \quad (1 - a)(0) + (3a^2 - 1)(-1) = 1 - 3a^2$

$x \to 0^- \quad (1 - a)(-1) + (3a^2 - 1)(0)$

$-1 + a$

$1 - 3a^2 = -1 + a$

$3a^2 + a - 2 = 0$

$a^2 + a - 6 = 0$

$(a + 3)(a - 2) = 0$

$a = -\frac{3}{2}$ غیرقابل قبول

$a = \frac{2}{3}$

$x \to 0 \quad \Rightarrow b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right)$

$a = \frac{۳}{۴}$ غیر قابل قبول $\quad 1 - ۳a^۲ = ۱ - \frac{۴}{۳} = -\frac{۱}{۳}$ $\qquad \frac{a}{b} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۴}} = ۳$

$a - 1 = -\frac{۱}{۴}$

$b \sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = -b \to b = \frac{۱}{۴}$

۸-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^۲ + mx - m - ۱|}{m|x^۲ - ۱| + |x - ۱|} & x \neq ۱ \\[2ex] \dfrac{m}{m+۲} & x = ۱ \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{(x-۱)}\,(x+m+۱)}{\cancel{|x-۱|}\,(m(x+۱))+۱} = \frac{|m+۲|}{۲m+۱} = \frac{m}{m+۲}$$

$\rightsquigarrow m < -۲ \to -m^۲ - ۴m - ۴ = ۲m^۲ + m$

$۳m^۲ + ۵m + ۴ = ۰ \to$ غیر قابل قبول $\Delta < ۰$

$\to m > -۲ \quad m^۲ + ۴m + ۴ = ۲m^۲ + m$

$m^۲ - ۳m - ۴ = ۰$

$(m - ۴)(m + ۱) = ۰$

$m = ۴ \qquad m = -۱$

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۴}} f(x) = \frac{|\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + ۱|}{(\frac{۱}{۴} \times \frac{۵}{۴}) + ۱} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱۹}{۴}} = \frac{۲۴}{۱۹} \qquad \frac{|-۱ - ۱ + ۱|}{۱} = ۱$$

۹-

$f(x) = \sqrt{۳}\ a|x+۱|$ $\qquad R - \{a\}$ $\to a$ ریشه مخرج

$a = \frac{2}{3}$ اگر باشد $1 - 2a^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$ $\qquad \frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

$a - 1 = -\frac{1}{3}$

$b \sin(\frac{3\pi}{2}) = -b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 + mx - m - 1|}{m|x^2 - 1| + |x - 1|} & x \neq 1 \\[2ex] \dfrac{m}{m+2} & x = 1 \end{cases}$$

$\dfrac{(\cancel{x-1})(x+m+1)}{|\cancel{x-1}|(m|x+1|+1)} = \dfrac{|m+2|}{2m+1} = \dfrac{m}{m+2}$

اگر $m < -2 \Rightarrow -m^2 - 4m - 4 = 2m^2 + m$

$3m^2 + 5m + 4 = 0 \rightarrow$ جواب ندارد

$\rightarrow m \geq -2 \quad m^2 + 4m + 4 = 2m^2 + m$

$m^2 - 3m - 4 = 0$

$(m-4)(m+1) = 0$

$m = 4 \qquad m = -1$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{|\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1|}{(\frac{3}{4} \times \frac{5}{4}) + 1} = \dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{19}{16}} = \dfrac{28}{19} \qquad \dfrac{|-1-1+1|}{1} = 1$

-9

$f(x) = \dfrac{\sqrt{3}\, a|x+1|}{|ax^2 + (a-2)x + a^2|} \qquad R - \{a\}$ $\rightarrow a$ ریشه مخرج و صورت است.

$|x-1| \quad |mx+\dots| \qquad |x-1| + |x-1|$

$\dfrac{m}{m+2}$ $\qquad x : 1$

⇝ $m<-2 \rightarrow -m^2-4m-4 = 2m^2+m$

$3m^2+5m+4=0 \rightarrow$ غیر قابل قبول $\quad \Delta<0$

↳ $m>-2 \quad m^2+4m+4 = 2m^2+m$

$m^2-3m-4=0$

$(m-4)(m+1)=0$

$m=4 \qquad m=-1$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1|}{(\frac{1}{4}\times\frac{5}{4})+1} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{19}{4}} = \dfrac{24}{19} \qquad \dfrac{|-1-1+1|}{1} = 1$

۹-

$f(x) = \dfrac{\sqrt{3}\ a|x+1|}{|x^3+(m-2)x+a^2|} \qquad R-\{a\}$ → a ریشه مخرج و صورت است.

$a(a+1)=0 \rightarrow a=0$ $\quad$ صورت $=0$ $\quad f(x)=0$ غ ق

↳ $a=-1$ $\quad |-1+(m-2)(-1)+1|=0$

$-m+2=0$

$m=2$ $\quad \rightarrow f(x) = \dfrac{\sqrt{3}\ |-x-1|}{|x^3+1|} = \dfrac{0}{0}$

$\rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\ \cancel{|x+1|}}{\cancel{|x+1|}\ |x^2-x+1|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

۱۰-

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+|x|}{x^2+a|x|} \\ \dfrac{2a-1}{2a+2} \end{cases} = \dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|+a)} = \dfrac{|x|+1}{|x|+a} \qquad \dfrac{1}{a} = \dfrac{2a-1}{2a+2}$

$2a^2-a = 2a+2$

$2a^2-3a-2=0$

$a^2-3a-4=0$

$(a-4)(a+1)=0$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{5} \qquad \neq \qquad \dfrac{4}{2} \quad \dfrac{-1}{2}$ ✓

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \dfrac{2+1}{2-\frac{1}{2}} = 2$

Scanned with CamScanner