دوازدهم A — تکلیف شماره ۲۱ — ۱۶ — پویا نگارنیا

۱-

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x^2+(m+3)x+\frac{m}{4}}}{|2x^3+(m-3)x^2+a^2|} & ; x\neq a\\[2ex] \dfrac{2\tan b}{\sqrt{-x}} & ; x=a\end{cases}$$

$0<b<\pi$

ریشه مضاعف $\rightarrow \Delta=0 \rightarrow (m+3)^2-12m=0 \rightarrow m^2+6m+9-12m=0 \rightarrow$

$\rightarrow m^2-6m+9=0 \rightarrow (m-3)^2=0 \rightarrow m=3$

$x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(m+3)}{12}\xrightarrow[x=a]{} a=-\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{4(x+\frac{1}{2})^2}}{|2x^3+\frac{1}{4}|}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{4}\,\cancel{|x+\frac{1}{2}|}}{2\cancel{|x+\frac{1}{2}|}\,|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|}=\boxed{\frac{2\sqrt{4}}{3}}$$

۲

$\rightarrow f(-\frac{1}{2})=\dfrac{2\tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2\sqrt{4}}{3}\rightarrow 2\sqrt{2}\tan b=\dfrac{2\sqrt{4}}{3}\rightarrow b=\dfrac{\pi}{4}$

$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$, $5x^2-ax+b=0$

۲- حد ✓
پیوسته ✗

مخرج دارد x=1 در $\xrightarrow{x=1}$ $5-a+b=0$
پیوسته نیست

$\xrightarrow{x=1}$ در ریشه x^2+ax+b صورت دارد اما $1+a+b=0$
پیوسته نیست

$$\begin{cases} a-b=5 \\ a+b=-1 \end{cases}$$

$2a=4 \to a=2$

$b=-3$

$$\left[\frac{b-2a}{3}\right]=\left[\frac{-3-4}{3}\right]=\left[\frac{-7}{3}\right]=-3$$

۳-

$$f(x)=\begin{cases} \tan\frac{(2x+1)\pi}{4} & ; x\le 1 \\ \frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} & ; 1<x<5 \\ b(x-[-x]) & ; x\ge 5 \end{cases}$$

۲

$x=1 \to \tan\frac{3\pi}{4}=-1$

$\frac{|(x+2)(x-1)|}{a(1-x)} \to \frac{-2}{+} \frac{1}{-1_{+}}$ $(1,5)$ $\to \frac{(x+2)(x-1)}{a(1-x)} = \frac{-(x+2)}{a}$

$x=5^{+} \to b(5-(-5)) = 10b$

شرط پیوستگی

$f(1)=\lim_{x\to 1^{+}} f(x) \to -1 = -\frac{(x+2)}{a} \to a=3$

$f(5)=\lim_{x\to 5^{-}} f(x) \to 10b = -\frac{\overbrace{(x+2)}^{7}}{\cancel{a}\,3} \Rightarrow b=-\frac{7}{30}$

$\to a\times b = \frac{-7}{10}$

Scbo

۴_

$$\underbrace{[x]+1}\qquad \underbrace{[x]+[a]+1}$$

$$f(x)=a[x+1]+b[x+[a+1]] \longrightarrow$$ پیوسته در $\mathbb{R}$

$$\rightarrow a[x]+a+b[x]+b[a]+b \rightarrow [x](a+b)+b[a]+a+b$$

اگر در براکت عامل صفرشونده ضرب شود پیوسته می‌شود

$$\rightarrow a+b=0 \rightarrow b=-a \rightarrow f(a)=[a]\underbrace{(a-a)}_{0}-a[a]+a-a$$

$$f(a)=-a[a]$$

$$\frac{a[a]}{f(a)}=\frac{a[a]}{-a[a]}=-1 \checkmark$$

۲

۵_

$$f(x)=b[x^2-ax]-2a \rightarrow$$ پیوسته در $\mathbb{R}$ و $f(x)\neq 0$

اگر $b=0$ باشد براکت پیوسته می‌شود $\rightarrow b=0$

۲

$$\frac{a}{f(b)} \rightarrow \frac{a}{\underset{-2a}{f(a)}}=\frac{a}{-2a}=-\frac{1}{2} \checkmark$$

۶_ ۵

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+mx+n}{a-x} & ; x\neq a\\[2ex] 2 & ; x=a\end{cases}$$

$\longrightarrow$ پیوسته در $\mathbb{R}$

$f(2a)=0$

$$f(x)=\frac{(x-a)(x-2a)}{-(x-a)}=\frac{(x-2)(x-4)}{-(x-2)}=\frac{x^2-6x+8}{-(x-2)}=\frac{x^2+mx+n}{-(x-2)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2+mx+n}{a-x}=2 \xrightarrow[\frac{0}{0}]{HOP} \frac{2x+m}{-1}=2 \rightarrow 2x+m=-2$$

$$m=-6,\ n=8 \rightarrow n-m=8-(-6)=14$$

$$x=a \longrightarrow a^2+am+n=0 \qquad f(2a)=0 \rightarrow \frac{4a^2+2am+n}{a}=0 \longrightarrow$$

$$\rightarrow 4a^2+2am+n=0 \rightarrow 4a^2+2am+\cancel{n}=a^2+ma+\cancel{n} \rightarrow 3a^2=-am$$

$$3a=-m,\ m=-\frac{3}{2}a \rightarrow 2a-\frac{3}{2}a=-2 \rightarrow a=-4 \rightarrow m=6$$

$$16-24+n=0 \rightarrow n=8 \qquad n-m=2$$

$$f(x)=\begin{cases}(1-a)[x]+(3a^2-1)[-x] & ; x\notin Z \\ b\sin(\frac{\pi}{a}) & ; x\in Z\end{cases}$$ ـ۷

۱۵

$a=\frac{2}{3}\rightarrow b\sin(\frac{\pi}{\frac{2}{3}})=-b\rightarrow -b=-\frac{1}{3}\rightarrow b=\frac{1}{3}$ $\quad \frac{a}{b}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=2$

$1-a=3a^2-1\rightarrow 3a^2+a-2=0 \rightarrow a=-1$

$\rightarrow a=\frac{2}{3}$

$a=\frac{2}{3}\rightarrow \frac{1}{3}([x]+[-x])=0\rightarrow \underbrace{b\sin(\frac{3\pi}{2})}_{-1}=0\rightarrow b=0$

$a=-1\rightarrow 2([x]+[-x])$.

$$\frac{\sqrt{3}\,|ax+a|}{|x^3+(m-2)x+a^2|}$$ ـ۹

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود دارد $\rightarrow a^3+(m-2)a+a^2=0\rightarrow \underset{\neq}{a}(a^2+a+m-2)=0$

$a^2+a=0\rightarrow \underset{\neq}{a}(a+1)$

قبول ۰ $\quad$ -1 قبول

$\underset{-1}{a^2}+\underset{-1}{a}+m-2=0\rightarrow m-2=0\rightarrow m=2$

۲

$\frac{\sqrt{3}\,|-x-1|}{|x^3+1|}\rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}}\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{3}}{3x^2}\rightarrow +\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(0)=\frac{2a-1}{2a+2}=\frac{1}{a} \rightarrow 2a^2-a=2a+2 \rightarrow 2a^2-3a-2=0 \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-\frac{1}{2} \times \end{cases}$

۱۵

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+|x|}{x^2+a|x|} & ; x\neq 0 \\ \frac{2a-1}{2a+2} & ; x=0 \end{cases}$$

$a=2 \rightarrow \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^2+x}{x^2+2x}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{5}$ ⤳ پیوسته در R

①

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2+ax} \xrightarrow[\text{hop}]{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0^+}\frac{2x+1}{2x+a}=\frac{1}{a}$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{x^2-ax} \xrightarrow[\text{hop}]{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0^-}\frac{2x-1}{2x-a}=\frac{1}{a}$

$\rightarrow \frac{2a-1}{2a+1}=\frac{1}{a} \rightarrow 2a^2-a=2a+1 \rightarrow 2a^2-3a-1=0$

$\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{4},\ \frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

سوال ۸

$\lim_{x\to\frac{1}{m}} \frac{|(x-1)(x+mx+1)|}{|(x-1)(x+1)|+|x-1|}=\frac{|x-1||(x+mx+1)|}{|x-1|(m|x+1|+1)}=\frac{|m+2|}{2m+1}=\frac{m}{m+2}$

$m\geq -2 \rightarrow m^2+4m+4=2m^2+m \rightarrow m^2-3m-4=0 \rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=4 \end{cases}$

$m=4 \rightarrow \frac{|x^2+4x-5|}{4|x-1||x+1|+|x-1|}=\frac{|x-1||x+5|}{|x-1|(4|x+1|+1)} \rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{5+\frac{1}{4}}{4\times\frac{5}{4}+1}=\frac{\frac{21}{4}}{6}=\frac{7}{8}$

$m=-1 \rightarrow \frac{|x^2-x|}{-|x-1||x+1|+|x-1|}=\frac{|x||x-1|}{|x-1|(-|x+1|+1)}$ $\times$