۲) اگر ۵ ریشه‌ای از معادله $ax^2-ax+b=0$ و تابع $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$ موجب

و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $\left[\frac{b-2a}{3}\right]$ را بیابید.

$1+a+b=0$ ← پس $(x-1)$ عامل صورت نیز هست ← حذف دارد $x=1$: تابع f ناپیوستگی

$a+b=-1$

۵ ریشه معادله است ← $5-a+b=0 \rightarrow b-a=-5$

۲

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ b-a=-5 \end{cases}$$

$2b=-6 \rightarrow b=-3$

$a=2$

$$\left[\frac{b-2a}{3}\right]=\left[\frac{-3-4}{3}\right]=-3$$

۴- تابع با ضابطه $f(x) = a\cancel{[x+1]} + b[x + \cancel{[a+1.]}]$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است مقدار $\dfrac{a[a]}{f(a)}$

$[a]+1$

$a[x]+a \qquad b[x]+b[a]+b$

داریم:

$$f(x) = [x](a+b) + (a+b) + b[a] = (a+b)([x]+1) + b[a]$$

توابع براکتی در $\mathbb{R}$ همه جا پیوسته نیست چون پس از هر عدد صحیح یک jump دارد. تنها شرط پیوستگی، صفر بودن

ضریب براکت ها برابر است : $a+b=0 \rightarrow b=-a \rightarrow f(x) = b[a] = -a[a]$

$$\frac{a[a]}{f(x)} = \frac{a[a]}{-a[a]} = -1$$

۲

هر تابع ناصفر $f(x) = b[x^2 - ax] - 2a$ همه جا پیوسته است. مقدار $\frac{a}{f(b)}$ را بیابید.

تابع براکت در نقاط صحیح پیوسته نیست و jump دارد بنابراین تنها شرط پیوستگی $f(x)$ این است
که ضریب براکت صفر باشد.

$b = 0 \rightarrow f(x) = -2a$

2

$$\frac{a}{-2a} = \frac{-1}{2}$$

۱) تابع $f(x)=\begin{cases}(-a+1)[x]+(3a^2-1)[-x] & x\notin \mathbb{Z}\\ b\sin(\frac{\pi}{a}) & x\in \mathbb{Z}\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است مقدار $\frac{a}{b}$ را بیابید؟

$x\in \mathbb{Z} \longrightarrow$ شرط پیوستگی ، $\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^-} f(x) = f(n)$

حد راست : $\lim_{x\to n^+} f(x) = (n)(1-a)+(3a^2-1)(-n-1)$

حد چپ : $\lim_{x\to n^-} f(x) = (1-a)(n-1)+(3a^2-1)(-n)$

برابری حد چپ و راست : $1-a = 3a^2-1$

$3a^2+a-2=0 \rightarrow \begin{cases} a=-1\\ a=\frac{2}{3}\end{cases}$

در $x=0$: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

۲

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3a^2+1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a-1$

$f(0)=b\sin(\frac{\pi}{a})$ $\xrightarrow{a=\frac{2}{3}}$ $f(0)=-b$ ✓ $\qquad -\frac{1}{3}=-b \rightarrow b=\frac{1}{3}$

$\xrightarrow{a=-1}$ $f(0)=0$ ×

$\frac{a}{b}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=2$ ✓

سوال ۱

$a \leftarrow$ تفاضل ریشه زیر رادیکال و باید مخرج را هم صفر کند

$\Delta=0 \to (m+3)^2-4(\frac{m}{4})\times 6=0 \to m^2+6m+9-12=0 \to m^2-6m+9=0 \to m=3$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{6x^2+6x+\frac{3}{2}}}{|2x^3+a^2|}=\frac{\sqrt{6(x^2+x+\frac{1}{4})}}{|2x^3+a^2|}=\frac{\sqrt{6}\,|x+\frac{1}{2}|}{|2x^3+a^2|}$$

$$2a^3+a^2=0 \to a^2(2a+1)=0 \to \begin{cases} a=0 \to \frac{\text{عدد}}{0} \ \times \\ a=-\frac{1}{2} \to \frac{\sqrt{6}\,|x+\frac{1}{2}|}{|2x^3+\frac{1}{4}|}=\frac{0}{0} \ \checkmark \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{6}\,|x+\frac{1}{2}|}{2|x^3+\frac{1}{8}|}=\frac{\sqrt{6}\,|x+\frac{1}{2}|}{2|x+\frac{1}{2}|\,|x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}|}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{2\tan b}{\sqrt{-(-\frac{1}{2})}}=\frac{2\sqrt{6}}{3} \to \tan b=\frac{\sqrt{3}}{3} \to b=\frac{\pi}{6}$$

سوال ۳ $f(x)$ در نقطه $x=1$ پیوستگی راست و در نقطه $x=5$ پیوستگی چپ دارد

$f(1)=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|(x+2)(x-1)|}{a(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+2)(x-1)}{-a(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+2)}{-a}=\frac{-3}{a}$$

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \to \frac{-3}{a}=-1 \to \boxed{a=3}$$

$$ab=\frac{-7}{10}$$

$$f(5)=b(5-[-5])=b(5+5)=10b$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}\frac{|x^2+x-2|}{3(1-x)}=\lim_{x\to 5^-}\frac{|25+5-2|}{3(1-5)}=\frac{-28}{12}=\frac{-7}{3}$$

$$\to 10b=\frac{-7}{3} \quad \boxed{b=\frac{-7}{30}}$$

سوال ۶

$f(2a)=0 \to x=2a \to$ ریشه صورت

$x=a \to$ ریشه صورت + ریشه مخرج

$$f(x)=\frac{(x-a)(x-2a)}{-(x-a)}=-(x-2a) \to f(x)=\begin{cases}-(x-2a) & x\neq a\\ 2 & x=a\end{cases}$$

$$f(a)=-(a-2a)=2 \to a=2$$

$$f(x)=\frac{(x-a)(x-2a)}{-(x-a)}=\frac{(x-2)(x-4)}{-(x-2)}=\frac{x^2-6x+8}{-(x-2)}=\frac{x^2+mx+n}{-(x-2)}$$

$$m=-6,\ n=8 \to n-m=8-(-6)=14$$

سوال ۸

$$\lim_{x\to\frac{1}{m}} \frac{|(x-1)(x+m+1)|}{|(x-1)(x+1)|+|x-1|} = \frac{|x-1||(x+m+1)|}{|x-1|(m|x+1|+1)} = \frac{|m+2|}{2m+1} = \frac{m}{m+2}$$

$$m \geq -2 \rightarrow m^2+4m+4 = 2m^2+m \rightarrow m^2-3m-4=0 \rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=4 \end{cases}$$

$$m=4 \rightarrow \frac{|x^2+4x-5|}{4|x-1||x+1|+|x-1|} = \frac{|x-1||x+5|}{|x-1|(4|x+1|+1)} \rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{5+\frac{1}{4}}{4\times\frac{5}{4}+1} = \frac{\frac{21}{4}}{6} = \frac{7}{8}$$

$$m=-1 \rightarrow \frac{|x^2-x|}{-|x-1||x+1|+|x-1|} = \frac{|x||x-1|}{|x-1|(-|x+1|+1)} \quad \times$$

سوال ۹

$x=a \rightarrow$ ریشه صورت و مخرج

$$a^2+a=0 \rightarrow a(a+1)=0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \ \times \\ a=-1 \ \checkmark \end{cases}$$

$$a^3+a(m-2)+a^2=0 \xrightarrow{a=-1} -1-m+2+1=0 \rightarrow m=2$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{3}|-x-1|}{|x^3+1|} = \frac{\sqrt{3}|-(x+1)|}{|(x+1)(x^2-x+1)|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سوال ۱۰

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2+|x|}{x^2+a|x|} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x}{x^2+ax} = \lim_{x\to0^+} \frac{x(x+1)}{x(a+x)} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x^2+|x|}{x^2+a|x|} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x\to0^-} \frac{x^2-x}{x^2-ax} = \lim_{x\to0^-} \frac{x(x-1)}{x(x-a)} = \frac{-1}{-a} = \frac{1}{a}$$

$$f(0) = \frac{2a-1}{2a+2} = \frac{1}{a} \rightarrow 2a^2-a = 2a+2 \rightarrow 2a^2-3a-2=0 \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=\frac{-1}{2} \ \times \end{cases}$$

$$a=2 \rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^2+x}{x^2+2x} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$