آدرینا حسینی ۱۲ دوازدهم جبر دفتر A تکلیف شماره ۲۲

۱

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2}\ (\to |x|) & ; x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\geq 1 \end{cases}$$

نقطه ریشه نقطه مشتق ناپذیر نیست اگر آن نقطه یا ریشه مرتبه زوج داخل قدرمطلق هست یا ریشه مضاعف درون رادیکال فرجه فرد. چون $a+\sqrt{x^2}=0 \leftarrow$ $a+|a|$ پس تنها نقطه مشتق ناپذیر

همچنین پس باید ضریب $\sqrt[3]{x^2}$ نفی شود یعنی $b=0$ ، و همچنین باید نقطه مرزی تابع در هر دو ضابطه صدق کند و مشتق راست و چپ هم برابر باشند

۰/۵

$a-b=-1 \to a-\frac{3}{2}=-1 \to a=\frac{1}{2}$

$a+\sqrt{1}=\cancel{b}_{0}\sqrt[3]{1^2} \to a+1=0 \to \boxed{a=-1}$ $\quad a+b=-1+0=\boxed{-1}$

$f'_-(1)=f'_+(1) \to 1=\frac{2}{3}b\times x^{-\frac{1}{3}} \to 1=\frac{2}{3}b(1)^{-\frac{1}{3}} \to b=\frac{3}{2}$

$a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$

۲

$g(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}$ $\quad f(1)'-2g'(1)$

$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$ $\quad \sqrt[3]{x^2}$

$f(x)=\dfrac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$(f(x)-2g(x))'=\frac{|2x-4|-2|x-2|+2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{+2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\frac{\cancel{2}\times 3}{\cancel{2}\sqrt{3x}}\times\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{3x}\times\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}}{(\sqrt[3]{x^2})^2}$$

$f'(1)=\dfrac{-2(1)-\frac{2}{3}(2)}{1}=\dfrac{-10}{3}$

$g'(1)=\dfrac{\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)-\frac{2}{3}(1+\sqrt{3})}{1}=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$$\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}}{1}=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}}{1}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$f'(1)-2g'(1)=\dfrac{-10}{3}-2\left(\dfrac{-5}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

۱

۳

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & ; x<a \\ \frac{1}{x} & ; x\geq a \end{cases}$$

$ac=?$

$x=a \to ab+c=\frac{1}{a} \to a^2b+ac=1 \to$ مقدار ۲ ضابطه برابر

$\xrightarrow[\text{مشتق}]{x=a} b=\frac{-1}{a^2} \to a^2b=-1 \to -1+ac=1 \to \boxed{ac=2}$

۲

۴

یک مقدار صحیح m

$$f(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ b+(x-a)^m & ; x\geq a \end{cases}$$

نقطه گوشه‌دار نفی است باید مقدار ۲ ضابطه برابر باشد و مشتق نه

۰/۵

$m\geq 2 \to \begin{cases} f'_-(a)=0 \\ f'_+(a)=0 \end{cases} \to f'_-(a)=f'_+(a)$ غ ق ق

$\xrightarrow{\text{مقدار}} b=b+\cancel{(x-a)^m}_{0} \to b=b$ مقدار برابر هست

پس مشتق باید نابرابر باشد.

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 0=0+m(x-a)^{m-1} \xrightarrow[x=a]{\text{بازهم}} 0=0 \to$ پس مشتق هم برابر هست.

پس به ازای هیچ مقداری از m نقطه (a,b) نقطه گوشه‌دار نیست.

$m=0 \to f'_-(a)=f'_+(a)$ × غ ق ق

$m=1 \to \begin{cases} f'_-(a)=0 \\ f'_+(a)=1 \end{cases} \to f'_-(a)\neq f'_+(a)$

۵

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$

$g(x)=\dfrac{1}{x^3-|x^3|}$

$$g'(-\sqrt[3]{2})\times f'(g(-\sqrt[3]{2}))=(fog(x))'=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3-|x^3|}-\left|\frac{1}{x^3-|x^3|}\right|}}$$

$-\sqrt[3]{2}$ مثبت

$$\to \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2x^3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x^3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}}\to\frac{1}{\frac{1}{x}}=(x)'=1$$

۲

6

$y = -ax - 5 \xrightarrow{\text{مشتق}} -a \to f'(3) \to f(3) = x=3 \to -3a-5 = -3\times -\frac{3}{2} - 5 = \frac{9}{2} - \frac{10}{2} = \frac{-1}{2}$

$f'(3) - f(3) = 2 \to -a + 3a + 5 = 2a + 5 = 2 \to a = \frac{-3}{2}$

1,5

$\frac{f(3)}{f'(3)} = ?$ f بر خط مماس است. $\longrightarrow \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{3}$

$\frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{-3a-5}{-a} = \frac{-3(-\frac{3}{2})-5}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3}$

7

$f(x) = \left(x + [x^2 + \frac{1}{2}]\right)^2 + 1 \xrightarrow{x=-2} (x+4)^2 + 1 = x^2 + 8x + 16 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x + 8 = \cancel{2} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} + 8$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{3\sqrt[3]{(\frac{9}{8}-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

0

$\left(fog(\frac{3}{\sqrt{8}})\right)' = g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) \times f'\left(g(\frac{3}{\sqrt{8}})\right) = 2\sqrt{2} \times f'(-2) = 2\sqrt{2} \times \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 8\right) = 9 + 16\sqrt{2}$

$g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

(جواب پایین صفحه)

8

$f'(-1) = \frac{3}{2}$

$3f'(4)$ → [illegible] $4 = 5-1$

1,5

$g(x) = f(x+1) + f(3x+10) \xrightarrow{x=-3} g(-3) = f(-1) + \cancel{f(4)} = 2f(-1)$

$f(-1)$

$g'(-3) = ? \longrightarrow g'(-3) = 2f'(-1) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$

$g'(-3) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$

9

$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3} \xrightarrow{x=5} (5-4)\sqrt[3]{5+3} = 2$

$f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + (x-4)\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \to f'(5) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$

1

$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \frac{(f(5-h)-2)(f(5-h)-1)}{h(5-h)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} 2\times -1 \times f(5-h) - 3\times -1 \times f(5-h)$

$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2f'(5-h)f(5-h) + 3f'(5-h)}{5-2h} =$

$= \frac{-2f(5) + 3f(5)}{-1} = -f(5) = -2$

$\frac{-2f'(5)f(5) + 3f'(5)}{5} = \frac{-2\times\frac{25}{12}\times 2 + 3\times\frac{25}{12}}{5} = \frac{-5}{12}$

10

$\xrightarrow{x=1} (1)^2 - 4(1) + 5 = \boxed{2}$

$y = x^2 - 4x + 5 \longrightarrow y' = 2x - 4 = -2 \longrightarrow x = 1$

$4y - 2x = 1 \longrightarrow$ شیب $= +\frac{1}{2} \longrightarrow$ شیب خط عمود بر آن $= -2$ ← وقتی مماس بر منحنی بالاست

یعنی شیب آنها با مشتق خط بالا در نقطه تماس یکسان هست.

نقطه $(1,2)$

2

سوال ۷

$$y = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x)\, f'(g(x)) \xrightarrow{x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}} y' = g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) f'\Big(\underbrace{g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)}_{۲}\Big) \longrightarrow y' = g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) f'(۲)$$

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}} = (x^۲ - ۱)^{-\frac{۱}{۳}} \longrightarrow g'(x) = -\frac{۱}{۳}(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}} \times ۲x = -\frac{۲}{۳}x(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = \frac{-۲}{۳} \times \frac{۳}{\sqrt{۸}}\left(\frac{۱}{۸}\right)^{-\frac{۴}{۳}} = \frac{-۲}{\sqrt{۸}} \times ۲^۴ = -\frac{۲^۵ \times \sqrt{۲}}{۲^۲} = -۲^۳\sqrt{۲} \longrightarrow g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = -۸\sqrt{۲}$$

$$f(x) = ۱۶x^۲ + ۱ \longrightarrow f'(x) = ۳۲x \longrightarrow f'(۲) = ۶۴$$

$$y' = g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) f'(۲) = -۸\sqrt{۲} \times ۶۴ = ۴ \times (-۱۲۸\sqrt{۲}) \longrightarrow$$ ۴ برابر