SUBJECT

Year: Month: Day:

۱۴/۵

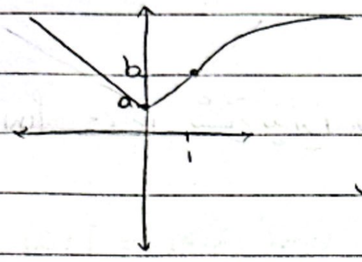
نام و نام خانوادگی : سحر کریمی

Page : ( )

۱) $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2} & x<1 \\ b \times \sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته — فقط در ۱ نقطه مشتق ناپذیر نیست $a+b=?$

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$b = a+1$



مثال تقریبی :

چون در $x=1$ مشتق پذیر است ← تنها نقطه‌ای که مشتق ناپذیر است در $x=0$ است

۲

$f'_-(1) = f'_+(1) \rightarrow 1 = \frac{2}{3} b x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow b = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}$

$a+b = 2$ ✓

۲) $f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad f'(1) - 2g'(1) = ?$

$g(x) = \frac{|x-2| + \sqrt{3x}}{x^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow{x=1} g(x) = \frac{-x+2+\sqrt{3}\, x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}$

$\xrightarrow{x=1} f(x) = \frac{-2x+4}{x^{\frac{2}{3}}}$

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

$g'(x) = \frac{\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}\right) - \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(-x+2+\sqrt{3}\, x^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{4}{3}}}$

Scanned with CamScanner

Page : (   )

SUBJECT:

Year: Month: Day:

$$f'(x) = \frac{(-2)(x^{\frac{2}{3}}) - (\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})(-2x+4)}{x^{\frac{4}{3}}}$$

۲

$$g'(1) = \frac{-\sqrt{3}}{9} - \frac{5}{3} \xrightarrow{\times -2} -2g'(1) = \frac{\sqrt{3}+10}{3}$$

$$f'(1) = \frac{-10}{3}$$

$$f'(1) - 2g'(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۳) $f(x) = \begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است . $ac = ?$

شرط ۱) پیوستگی : $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

$\rightarrow ba + c = \frac{1}{a} \xrightarrow{\times a} ba^2 + ca = 1$

شرط ۲) مشتق‌پذیری : $f'_-(a) = f'_+(a)$

۲

$\rightarrow b = \frac{-1}{a^2} \rightarrow a^2 b = -1$

$$\left.\begin{matrix} ba^2 + ac = 1 \\ ba^2 = -1 \end{matrix}\right\} \rightarrow ac = 2$$

۴) $f(x) = \begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ برای نقطهٔ گوشه‌ای (a,b) . $m \rightarrow$ ج ، $\oplus$ با .

شرط نقطهٔ گوشه‌ای : ۱) پیوستگی تابع در $x=a$ ← برقرار ✓ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = b$

۲) باید مشتق چپ و راست [illegible] :

۲

$f'_-(a) = 0$

$f'_+(a) = m(x-a)^{m-1}$

$\nearrow m=0 : f'_-(a) = f'_+(a) = 0$ ×

$\rightarrow m=1 : f'_+(a) = 1 \quad f'_-(a) = 0$ ✓

$\searrow m \geq 2 : f'_+(a) = f'_-(a) = 0$ ×

Scanned with CamScanner

پس تنها جواب قابل قبول برای m ، ۱ است

۵- $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$, $g(x)=\frac{1}{x^3-|x^3|}$ $\qquad g'(-\sqrt[3]{2})\, f'(g(-\sqrt[3]{2}))=\,?$

۱

$x<0:\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(x^{-\frac{1}{3}}\right) \to f'(x)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{2}}\left(x^{-\frac{4}{3}}\right)$

$x<0:\ g(x)=\frac{1}{2x^3} \to g'(x)=\frac{-6x^2}{4x^6}=\frac{-3}{2x^4}$

$g'(x)\times f'(g(x))=\frac{-3}{2x^4}\times\frac{2^{\frac{4}{3}}\times x^4}{3\sqrt[3]{2}}=8 \to$ حاصل عدد ثابت است

$fog(x)=f\left(\frac{1}{2x^3}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x\left(\frac{1}{2x^3}\right)}}=x \to fog(x)=x \to (fog(x))'=1$ پس به ازای $x=\sqrt[3]{2}$ هم ۸ است

۶- $y=-ax-5$ در نقطه‌ی $x=3$ بر نمودار $f(x)$ مماس است . $f'(3)-f(3)=2$, $\frac{f(3)}{f'(3)}=\,?$

$g(x)$

۲

$f'(3)=g'(3)=-a$

$f(3)=g(3)=-3a-5$

$\to f'(3)-f(3)=2 \to -a+3a+5=2 \to 2a=-3 \to a=-\frac{3}{2}$

$f'(3)=\frac{3}{2}$

$f(3)=\frac{9}{2}-5=\frac{-1}{2}$

$\to \frac{f(3)}{f'(3)}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{-1}{3}$

Scanned with CamScanner

$(f\circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = ?$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, $f(x) = \left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2+1$ ۷

۱

$-128\sqrt{2}$

$g'(x) = \dfrac{\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \xrightarrow{x=\frac{3}{\sqrt{8}}} g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{-16}{\sqrt{2}}$

$f(x) = 16x^2+1 \rightarrow f'(x) = 32x \rightarrow f'(2) = 64$

$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = 2$

$y' = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) f'(2) = -8\sqrt{2} \times 64 = 4 \times (-128\sqrt{2}) \rightarrow$ ۴ برابر

$f'(x) = 2\left(x\overbrace{\left[x^2+\frac{1}{2}\right]}^{2}\right)\left(\overbrace{\left[x^2+\frac{1}{2}\right]}^{2}\right) \rightarrow f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right) = 16$

$(f\circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = 16 \times \frac{-16}{\sqrt{2}}$

جواب : $\dfrac{16 \times \frac{-16}{\sqrt{2}}}{-2^5 \times \sqrt{2}} = -1$

جواب. پس $g(x) = f(x+1) + f(3x+10)$, $f'(-1) = \frac{3}{2}$, $T_f = 5$ ۸

$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$ ۲ $g'(-2)$ را بیابید

$g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4) \xrightarrow[-1+5=4]{T=5} f'(4) = f'(-1) \rightarrow$

$g'(-2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$

Scanned with CamScanner

SUBJECT:
Year: Month: Day: Page : ( )

۹- $\lim_{h \to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = ?$ $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3}$

۰/۷

$f(5) = 2$

$\lim \frac{0}{0}$ hop $\frac{-2 \times f(5-h) \times f'(5-h) + 3f'(5-h)}{5-2h}$

$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3} \longrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + (x-4)\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \longrightarrow f'(5) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$

$h = 0$ $\frac{-2f(5)f'(5) + 3f(5)}{5} = \frac{-8+6}{5} = \frac{-2}{5}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-2f'(5-h)f(5-h) + 3f'(5-h)}{5-2h} = \frac{-2f'(5)f(5) + 3f'(5)}{5} = \frac{-2 \times \frac{25}{12} \times 2 + 3 \times \frac{25}{12}}{5} = \frac{-5}{12}$

۱۰- $y = x^2 - 4x + 5$ خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه‌ای بر خط $4y - 2x = 1$ عمود است.

$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \rightarrow$ شیب خط عمود: -2

۲

$f'(x) = 2x - 4 \rightarrow 2x - 4 = -2 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2$

جواب: $(1, 2)$

Senobar