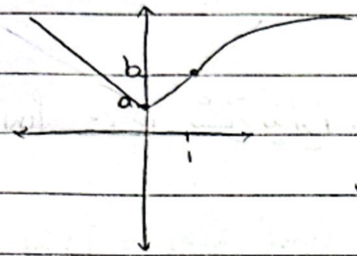
SUBJECT: Year: Month: Day:

نام و نام خانوادگی : سحر کریمی

۱) $f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & x<1 \\ b\times\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته ـ فقط در نقطه مشتق ناپذیر نیست ـ $a+b=?$

شرط پیوستگی : $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)$

$b=a+1$



مسیر تقریبی :

پس در $x=1$ مشتق پذیر است ← تنها نقطه‌ی مشتق ناپذیر در $x=0$ است

$f'_-(1)=f'_+(1) \to 1=\frac{2}{3}bx^{-\frac{1}{3}} \to b=\frac{3}{2} \to a=\frac{1}{2}$

$a+b=2$

۲) $f(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad f'(1)-2g'(1)=?$

$g(x)=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{x^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow{x=1} g(x)=\frac{-x+2+\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}$

$\xrightarrow{x=1} f(x)=\frac{-2x+4}{x^{\frac{2}{3}}}$

$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \to h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

$g'(x)=\frac{(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{2}{3}})-(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})(-x+2+\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{4}{3}}}$

Page : ( ) SUBJECT: Year: Month: Day:

$$f'(x)=\frac{(-3)(x^{\frac{2}{3}})-(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})(-3x+4)}{x\cdot x^{\frac{4}{3}}}$$

$$g'(1)=\frac{-\sqrt{3}}{9}-\frac{5}{3}\xrightarrow{\times -2}-2g'(1)=\frac{\sqrt{3}+10}{3}$$

$$f'(1)=\frac{-10}{3}$$

$$\left.\right\}\ f'(1)-2g'(1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۳ - $f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x\geq a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. $ac=?$

۱) شرط پیوستگی: $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

$\rightarrow ba+c=\frac{1}{a}\xrightarrow{\times a} ba^2+ca=1$

۲) شرط مشتق‌پذیری: $f'_-(a)=f'_+(a)$

$\rightarrow b=\frac{-1}{a^2}\rightarrow a^2b=-1$

$$\left.\begin{matrix} ba^2+ac=1 \\ ba^2=-1\end{matrix}\right\}\rightarrow ac=2$$

۴ - $f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a\end{cases}$ نقطهٔ (a,b) نقطهٔ گوشه‌ای باشد. $m \nearrow$ ج، $\searrow$ ۰ یا $\oplus$

شروط نقطهٔ گوشه‌ای: ۱) پیوستگی تابع در $x=a$ برقرار ✓ $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)=b$

۲) باید مشتق چپ و راست نابرابر شوند:

$f'_-(a)=0$

$f'_+(a)=m(x-a)^{m-1}$

$\nearrow m=0:\ f'_-(a)=f'_+(a)=0$ ✗

$\rightarrow m=1:\ f'_+(a)=1\quad f'_-(a)=0$ ✓

$\searrow m\geq 2:\ f'_+(a)=f'_-(a)=0$ ✗

Senobar

پس تنها جواب قابل قبول برای m ، ۱ است

۵- $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ ، $g(x)=\frac{1}{x^3-|x^3|}$ ، $g'(-\sqrt[3]{2})\,f'(g(-\sqrt[3]{2}))=?$

$x<0:\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(x^{-\frac{1}{3}}\right) \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{2}}\left(x^{-\frac{4}{3}}\right)$

$x<0:\ g(x)=\frac{1}{2x^3} \rightarrow g'(x)=\frac{-6x^2}{4x^6}=\frac{-3}{2x^4}$

$g'(x)\times f'(g(x))=\frac{-3}{2x^4}\times\frac{2^{\frac{4}{3}}\times x^4}{-3\sqrt[3]{2}}=8 \rightarrow$ چون عدد ثابت است
پس به ازای $x=-\sqrt[3]{2}$ هم ۸ است

۶- $\underbrace{y=-ax-5}_{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=3$ بر نمودار $f(x)$ مماس است ، $f'(3)-f(3)=2$ ، $\frac{f(3)}{f'(3)}=?$

$f'(3)=g'(3)=-a$
$f(3)=g(3)=-3a-5$
$\rightarrow f'(3)-f(3)=2 \rightarrow -a+3a+5=2 \rightarrow 2a=-3 \rightarrow a=\frac{-3}{2}$

$f'(3)=\frac{3}{2}$
$f(3)=\frac{9}{2}-5=\frac{-1}{2}$
$\rightarrow \frac{f(3)}{f'(3)}=\frac{\frac{-1}{\cancel{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}=\frac{-1}{3}$

$(f\circ g)'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = ?$ $\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, $f(x)=\left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2+1$ ۷

$-128\sqrt{4}$

$$g'(x)=\frac{\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \xrightarrow{x=\frac{3}{\sqrt{8}}} g'(\frac{3}{\sqrt{8}})=\frac{-16}{\sqrt{4}}$$

$$g(\frac{3}{\sqrt{8}})=2$$

$$f'(x)=2\left(x\left[\overbrace{x^2+\frac{1}{2}}^{2}\right]\right)\left(\left[\overbrace{x^2+\frac{1}{2}}^{2}\right]\right) \to f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}}))=16$$

$$(f\circ g)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))=16\times\frac{-16}{\sqrt{4}}$$

جواب: $\frac{16\times\frac{-16}{\sqrt{4}}}{-2^5\times\sqrt{4}}=-1$

سوال. اگر $g(x)=f(x+1)+f(3x+10)$, $f'(-1)=\frac{3}{2}$, $T_f=5$ ۸

$g'(x)=f'(x+1)+3f'(3x+10)$ $\qquad$ $g'(-2)$ را بیابید

$$g'(-2)=f'(-1)+3f'(4) \xrightarrow[-1+5=4]{T=5} f'(4)=f'(-1) \to$$

$$g'(-2)=4f'(-1)=4\times\frac{3}{2}=6$$

SUBJECT:
Year: Month: Day:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^3(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = ? \qquad f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3} \qquad \text{-9}$$

$$\lim \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \frac{-2 \times f(5-h) \times f'(5-h) + 3f'(5-h)}{5-2h}$$

$$\underset{\checkmark}{h=0} \quad \frac{-2f(5)f'(5) + 3f'(5)}{5} = \frac{-8+6}{5} = \frac{-2}{5}$$

-10 $y = x^2 - 4x + 5$ ($f(x)$) ← خط مماس بر این منحنی بر $4y - 2x = 1$ عمود است.

$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ → شیب خط عمود : -2

$f'(x) = 2x - 4 \rightarrow 2x - 4 = -2 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2$

جواب : $(1, 2)$