

۱ - تابع $f(x)$ در $x=0$ مشتق ناپذیر است
 زیرا داخل قوس مطلق صفری شود و چون
 سوال گفته تنها در یک نقطه مشتق نداریم
 پس تابع باید در $x=0$ مشتق پذیر باشد.
 هم پیوسته و
 هم $f'(0)$ وجود داشته باشد

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^3} & x < 1 \\ b\sqrt{x^3} & x \geq 1 \end{cases} \quad (1) \quad a+b=1 \quad - \quad (a+|x|)' = (b\sqrt{x^3})'$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3}{4}b \Rightarrow b = \frac{4}{3} \xrightarrow{(1)} a+1 = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$a+b = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \boxed{1.66}$$

۲ - نقطه $x=1$ در $f(x) = \frac{-2x+4}{\sqrt{x^3}}$
 $g(x) = \frac{-x+2+\sqrt{3x}}{\sqrt{x^3}}$

$$f'(1) = g'(1) = (f-g)'(1) = \left(\frac{-2x+4}{\sqrt{x^3}} - \frac{-x+2+\sqrt{3x}}{\sqrt{x^3}} \right)'(1)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt{x^3}} \right)'(1) = (-2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}})'(1) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}x^{-\frac{3}{2}} \right)'(1) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \boxed{0.577}$$

۳ - هنگامی که تابع مشتق پذیر است:
 ۱- پیوسته است $f(1) = f(2) = 2$
 ۲- $f'(1) = f'(2)$

$$f(x) = \begin{cases} bx+c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases} \quad (1) \quad a+b+c = \frac{1}{a}$$

$$-f'(x) = \begin{cases} b & x < a \\ -\frac{1}{x^2} & x \geq a \end{cases} \xrightarrow{f'(a)=f'(a)} b = -\frac{1}{a^2} \xrightarrow{(1)} a(-\frac{1}{a^2}) + c = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{a} \Rightarrow ac = \boxed{2}$$

۴ - تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته نیست
 زیرا $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b + \frac{1}{(a-a)^m}$ و $b \neq b + \frac{1}{(a-a)^m}$

$$f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$$

ناپیوستگی در $x=a$ به دو صورت می‌تواند باشد:
 ۱- ناپیوستگی درجه اول (پرش) $\rightarrow$ در $x=a$ دو مقدار مختلف داریم.
 ۲- ناپیوستگی درجه دوم (خستگی) $\rightarrow$ در $x=a$ یک مقدار داریم اما مشتق از آنجا وجود ندارد.

نکته: فقط گوشه، فقط ای است که در آن تابع پیوسته ولی مشتق ناپذیر است.

پایه ای $m > 1$ تابع هم پیوسته هم مشتق پذیر است و اگر $m=1$ یا $m=0$ ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + x - a & x \geq a \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & x > a \\ 1 & x < a \end{cases}$$

۵ - $g(-\sqrt{x}) = f(g(-\sqrt{x})) = (f \circ g)(-\sqrt{x})$

$$x < 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{(1/\sqrt{x^3})^3}} = x \rightarrow (f \circ g)'(x) = \boxed{1}$$

$$g(-\sqrt{x}) < 0 \Rightarrow h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$f'(v) = -a \rightarrow f'(w) - f(v) = v \Rightarrow -a + wa + w = v \Rightarrow va = -v \Rightarrow a = -\frac{v}{v}$$

$$f(v) = -va - w$$

$$\frac{f(v)}{f'(v)} = \frac{\frac{v}{v} - w}{-\frac{v}{v}} = \frac{-\frac{1}{v}}{-\frac{v}{v}} = \boxed{-\frac{1}{v}}$$

6

$$(f \circ g)'(\frac{w}{\sqrt{v}}) = g'(\frac{v}{\sqrt{v}}) f'(g(\frac{w}{\sqrt{v}})) = g'(\frac{w}{\sqrt{v}}) f'(v) \rightarrow 2\sqrt{v} \times v = 12\sqrt{v}$$

$$g(\frac{w}{\sqrt{v}}) = v \quad / \quad g'(x) = \frac{vx}{v\sqrt{x-1}} \rightarrow x = \frac{w}{\sqrt{v}} \Rightarrow g'(\frac{w}{\sqrt{v}}) = 2\sqrt{v}$$

$$\frac{12\sqrt{v}}{2\sqrt{v}} = \boxed{-1}$$

$$f'(v) = \lim_{x \rightarrow v} \frac{x^v [x^v + \frac{1}{v}] - vx}{x-v} = \lim_{x \rightarrow v} \frac{1+x^v - vx}{x-v} = \lim_{x \rightarrow v} \frac{(1+x^v)(x-v)}{x-v} = \boxed{1+x^v}$$

7

$$g'(x) = f'(x+1) + v f'(vx+1) \rightarrow g'(v) = f'(-1) + v f'(v) \xrightarrow{\text{تعويض } f'(x) = \frac{1}{x}} g'(-v) = -\frac{1}{v} f'(-1)$$

$$\xrightarrow{f'(-1) = \frac{v}{v}} g'(-v) = -\frac{1}{v} \times \frac{v}{v} = \boxed{-\frac{1}{v}}$$

8

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(\omega-h)-1)(f(\omega-h)-v)}{h(\omega-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\omega-h)-1}{h-\omega} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\omega-h)-v}{h} \quad f(\omega) = v$$

$$\frac{1}{\omega} \times -f'(\omega) = -\frac{1}{\omega} f'(\omega) \xrightarrow{f'(\omega) = \frac{v}{\omega}} = \boxed{-\frac{v}{\omega}}$$

9

$$f'(a) = \frac{v}{\sqrt{a+v}} + \frac{(a-v)}{v\sqrt{(a+v)^3}} \rightarrow f'(a) = \frac{v}{\sqrt{a+v}}$$

$$vy - vx = 1 \rightarrow \text{شيب} = \frac{1}{v} \rightarrow \text{شيب} : -v$$

$$-v = x - v \Rightarrow \boxed{x = v}$$

10