۲۰

مبینا هاتف الحسینی — «دوازدهم ریاضی» «A»

۱- f پیوسته:

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1\end{cases} \qquad \sqrt{x^2}=|x| \qquad -1+1 \qquad * \; a+1=b$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ -1 & x<0 \\ \dfrac{2\times b}{3\sqrt[3]{x}} & x>1\end{cases}$$

$\frac{2b}{3}=1$ یا $\frac{2b}{3}=-1$

$b=\frac{3}{2}$ یا $b=\frac{-3}{2}$

$a=\frac{1}{2}$ ، $a=\frac{-5}{2}$

$\Downarrow$ ، $\Downarrow$

$a+b=2$ ✓ ، $a+b=-4$

۲

۲- $f(x)=\dfrac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ ، $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(1)-2g'(1)=? \Rightarrow (f-2g)'(1)=?$

$$\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2|x-2|+2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}=-2\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$$

$$=-2\sqrt{3}\,x^{\frac{-1}{6}} \Rightarrow (f-2g)'(x)=\frac{2\sqrt{3}}{6}x^{\frac{-7}{6}} \xrightarrow{x=1} \frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲

۳- f در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر ← در $\mathbb{R}$ پیوسته

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \dfrac{1}{x} & x\geq a\end{cases}$$

$bx+c=\frac{1}{a} \Rightarrow ba^2+ca=1 \; *$ ، $\boxed{ca=2}$ ✓

$$f'(x)=\begin{cases} b & x<a \\ \dfrac{-1}{x^2} & x>a\end{cases}$$

$f'_+(a)=f'_-(a)$

$\frac{-1}{a^2}=b \Rightarrow ba^2=-1 \; *$

۲

ـ۴ $f(x) = \begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ m صحیح و نامنفی ؟

$L_r = \infty , L_l$ ... $L_l \neq L_r$ → (a,b) گوشه‌ای

$f'(x) = \begin{cases} 0 & x<a \quad f'_-(a)=0 \\ m(x-a)^{m-1} & x>a \quad f'_+(a) \neq 0 \end{cases}$

۲

If $m>1 \Rightarrow f'_+(a) = 0$ ✗

If $m<1 \Rightarrow f'_+(a) = \infty$ ✗

If $m=1 \Rightarrow f'_+(a) = m$ ✓

فقط به ازای یک مقدار صحیح و نامنفی $(m=1)$ ✓

ـ۵

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} \qquad g(x) = \dfrac{1}{x^3-|x^3|}$

$g'(-\sqrt[3]{2})\, f'(g(-\sqrt[3]{2})) = ? \rightsquigarrow (f(g(-\sqrt[3]{2})))' = ?$

۲

$fog(x) \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{\underbrace{x^3-|x^3|}_{-x^3}} - \left|\dfrac{1}{x^3-|x^3|}\right|}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{2x^3} - \left|\dfrac{1}{2x^3}\right|}}$

$\dfrac{1}{2x^3}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{2}{2x^3}}} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow fo\cancel{g'(x)} = 1 \Rightarrow (fog)'(-\sqrt[3]{2}) = 1$ ✓

-۶

$y = -ax - ۵$, f

$f'(۳) - f(۳) = ۲$ $\qquad \dfrac{f(۲)}{f'(۲)} = ?$

$f'(۳) = -a$

$f(۳) = -۳a - ۵ \;\Big|\; -a + ۳a + ۵ = ۲$

$۲a = -۳ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow f'(۲) = \frac{۳}{۲}$

$f(۲) = -\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow \dfrac{f(۲)}{f'(۲)} = \dfrac{-۱}{۳}$

۲

-۷

$f(x) = \left(x\left[x^۲ + \frac{۱}{۲}\right]\right)^۲ + ۱ \qquad \Rightarrow \dfrac{(f \circ g)'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)}{-۱۲۸\sqrt{۲}}$

$g(x) = \dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}} \qquad g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) f'\left(\underbrace{g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)}_{۲}\right)$

$* \; g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = \dfrac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸} - ۱}} = ۲ \qquad * \; f(x) = \left(x\left[\cancel{۴ + \frac{۱}{۲}}\right]\right)^۲ + ۱$

$* \; f(x) = ۱۶x^۲ + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۳۲x \Rightarrow f'(۲) = ۶۴$

$g(x) = (x^۲ - ۱)^{-\frac{۱}{۳}} = -\frac{۱}{۳}(x^۲ - ۱)^{-\frac{۴}{۳}}(۲x) =$

$-\frac{۱}{۳} \times \dfrac{۱}{\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{۸}\right)^۴}} \times ۲ \times \dfrac{۳}{\sqrt{۸}} = \dfrac{-۱}{\cancel{۳}} \times ۱۶ \times \cancel{۲} \times \dfrac{\cancel{۳}}{\cancel{\sqrt{۸}}_{\,۲\sqrt{۲}}} = \dfrac{-۱۶}{\sqrt{۲}}$

$\dfrac{(f \circ g)'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)}{-۱۲۸\sqrt{۲}} = \dfrac{\cancel{۶۴} \times \cancel{-۱۶}}{\cancel{\sqrt{۲}} \times \cancel{-۱۲۸}\,\cancel{\sqrt{۲}}} = ۴$

۴

۸ـ f مشتق‌پذیر $\longrightarrow T_f = 5 \Rightarrow f'(-1) = f'(4) = \frac{3}{2}$

$f'(-1) = \frac{3}{2} \qquad g(x) = f(x+1) + f(3x+10) \Rightarrow g'(-2) = ?$

۲

$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$

$g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4) = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow \boxed{g'(-2) = 6}$

۹ـ $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3}$

$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop}$ $\quad h(5-h) = 5h - h^2$

$\lim_{h\to 0} \frac{-2f(5-h)f'(5-h) + 3f'(5-h)}{5-2h}$

$\Rightarrow \frac{-2f(5)f'(5) + 3f'(5)}{5}$

۲

$f'(x) = 1\sqrt[3]{x+3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}(x-4)$

$* f'(5) = 2 + \frac{1}{12} \times 1 = \frac{25}{12}$

$* f(5) = 2$

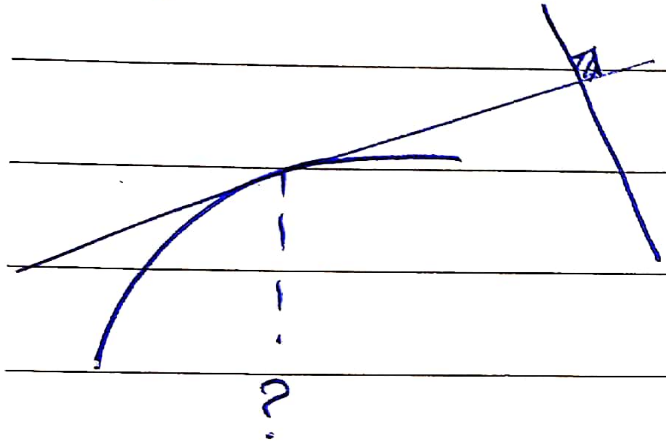
$\frac{-4 \times \frac{25}{12} + \frac{75}{12}}{5} = \frac{\cancel{-100} + 75}{12 \times 5} = \boxed{\frac{-5}{12}}$ $\quad (-25)$

۱۰-

$$f(x)$$
$$y = x^{2} - 4x + a \qquad 4y - 3x = 1$$

$$f'(x) = 2x - 4 = -2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

۲



$$4y - 3x = 1$$
$$y = \frac{1+3x}{4} \rightarrow m = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{شیب خط ب} = -2$$

$$\Rightarrow \text{نقطه } (1, 2)$$