١٢

هلنا محمودی ، دوازدهم جهم

۵ ،

$$(f\circ g)'(-\sqrt[3]{2}) = g'(-\sqrt[3]{2}) \times f'(g(-\sqrt[3]{2})) \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x}} \\ g(x) = \dfrac{1}{2x^3} \end{cases}$$

✓ ٢

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{2x^3}}} = x \Rightarrow (f\circ g)' = (x)' = 1 \checkmark$$

۶ ،

$$f(3) = -3a - d \,,\quad f'(3) = -a$$

٢

$$\xrightarrow{f'(3) - f(3) = 2} -a + 3a + d = 2 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

✓

$$\Rightarrow \begin{cases} f(3) = -3 \times \dfrac{-3}{2} - d = \dfrac{-1}{2} \\ f'(3) = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3} \checkmark$$

۷ ،

$(f\circ g(x))' = g'(x) \times f'(g(x))$ پس $g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$ را اول

حساب می کنیم

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8} - 1}} = 2 \Rightarrow (f\circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \cdot \boxed{f'(2)} \rightarrow$$ در مرحله‌ی بعد محاسبه شد

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

٢

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{-2\times\frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^4}} = \frac{-16}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2}$$

★ برای محاسبه‌ی $f'(2)$ در یک همسایگی $x=2$ ضابطه‌ی f به صورت زیر است.

$$f(x) = (4x)^2+1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$(f\circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -8\sqrt{2}\times 64 = \underline{-128\sqrt{2}\times 4}$$

(۸) چون f متناوب و دوره تناوب ۵ است پس مشتق f نیز دوره تناوب ۵ دارد.

★ مشتق تابع f: $g'(x) = f'(x+1)+3f'(3x+10)$

$$g'(-2) = f'(-2+1)+3f'(-6+10) = \underbrace{f'(-1)+3f'(4)}$$ ۲

$$\Rightarrow f'(4) = f'(4-5) = f'(-1) \Rightarrow g'(-2) = 4f'(-1) = 4\times\frac{3}{2} = 6$$

۴

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f^{۲}(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)} = \lim_{h\to ۰} \frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۱}{۵-h} \times \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۲}{h} = \frac{f(۵-h)-۲}{h} \times \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۲}{h}$$

$$= \frac{۲-۱}{۵} \times \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵+(-h))-f(۵)}{h} = -\frac{۱}{۵} \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵+(-h))-f(۵)}{-h}$$

$$-\frac{۱}{۵} \lim_{t\to ۰} \frac{f(۵+t)-f(۵)}{t} = -\frac{۱}{۵} f'(۵)$$

$$f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳} \Rightarrow f'(x) = ۱\times\sqrt[۳]{x+۳} + \frac{x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^{۲}}}$$

$$f'(۵) = \sqrt[۳]{۸} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۶۴}} = ۲ + \frac{۱}{۳\times ۴} = ۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲}$$ ✓

۲

$$-\frac{۱}{۵} f'(۵) = -\frac{۱}{۵} \times \frac{۲۵}{۱۲} = -\frac{۵}{۱۲}$$ ✓

(۱۰)

$4y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \Rightarrow$ شیب $= \frac{1}{2} \Rightarrow$ شیب خط عمود $= -2$

$y' = 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 - 4 + 5 = 2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array} \right.$ ✓

۲

سوال ۱) تابع $|x|$ در $x=0$ نقطه گوشه دارد پس مشتق ناپذیر است.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \to a+1=b \to a-b=-1 \rightsquigarrow a-b=-1 \to a-\frac{3}{2}=-1 \to a=\frac{1}{2}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \to 1 = \frac{2}{3} b \times x^{-\frac{1}{3}} \to 1 = \frac{2}{3} b (1)^{-\frac{1}{3}} \to b = \frac{3}{2}$$

$$a+b = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

سوال ۲)

$$f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x=1} \frac{-2x+4}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{-2x+4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \frac{-2(1) - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(2)}{\sqrt[3]{x^4}} \longrightarrow f'(1) = \frac{-2(1) - \frac{2}{3}(2)}{1} = \frac{-10}{3}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{|x-2| + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x=1} \frac{(-x+2)+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g'(x) = \frac{\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{3x}}\right)(1) - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(1+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{x^4}} \to g'(1) = \frac{\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{3}(1+\sqrt{3})}{1} = -\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(1) - 2g'(1) = \frac{-10}{3} - 2\left(\frac{-5}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سوال ۳)

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \to \frac{1}{a} = ba + c$$

$$f'(x) = \begin{cases} b & x<a \\ \frac{-1}{x^2} & x\geq a \end{cases} \to f'_+(a) = f'_-(a) \to b = \frac{-1}{a^2}$$

$$\to \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2} \times a + c$$

$$\frac{2}{a} = c \qquad ac = 2$$

سوال ۴)

نقطه گوشه $f \to f'_-(a) \neq f'_+(a)$

$m=0 \to f'_-(a) = f'_+(a)$ × غلط

$$m=1 \to \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 1 \end{cases} \to f'_-(a) \neq f'_+(a)$$

$$m\geq 2 \to \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 0 \end{cases} \to f'_-(a) = f'_+(a)$$ غلط

یک مقدار صحیح m