هلنا محمودی، دوازدهم جمعه

۵)

$$(fog)'(-\sqrt[3]{2}) = g'(-\sqrt[3]{2}) \times f'(g(-\sqrt[3]{2})) \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x}} \\ g(x) = \dfrac{1}{2x^3} \end{cases}$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{2x^3}}} = x \Rightarrow (fog)' = (x)' = 1 \checkmark$$

۶)

$$f(3) = -3a - d \,,\quad f'(3) = -a$$

$$\xrightarrow{f'(3) - f(3) = 2} -a + 3a + d = 2 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(3) = -3 \times \dfrac{-3}{2} - d = \dfrac{-1}{2} \\ f'(3) = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3} \checkmark$$

۷)

$(fog(x))' = g'(x) \times f'(g(x))$ پس $g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$ را لازم

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8} - 1}} = 2 \Rightarrow (fog)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \underbrace{g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)}_{\text{حساب می‌کنیم}} \cdot \boxed{f'(2)}$$

در صفحه‌ی بعد محاسبه شد

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{-2\times\frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^4}}=\frac{-16}{\sqrt{2}}=-8\sqrt{2}$$

★ برای محاسبه‌ی $f'(2)$ در یک همسایگی $x=2$ ضابطه‌ی f به صورت زیر است.

$$f(x)=(4x)^2+1 \Rightarrow f'(x)=32x \Rightarrow f'(2)=64$$

$$(f\circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=-8\sqrt{2}\times 64=\underline{-128\sqrt{2}\times 4}$$

(۸) ، چون f متناوب و دوره تناوب ۵ است پس مشتق f نیز دوره تناوب ۵ دارد.

★ مشتق تابع f :

$$g'(x)=f'(x+1)+3f'(3x+10)$$

$$g'(-2)=f'(-2+1)+3f'(-6+10)=\underbrace{f'(-1)+3f'(4)}$$

$$\Rightarrow f'(4)=f'(4-5)=f'(-1)\Rightarrow g'(-2)=4f'(-1)=4\times\frac{3}{2}=6$$

4

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(5-h)-1)(f(5-h)-2)}{h(5-h)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5-h)-1}{5-h}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(5-h)-2}{h}=\frac{f(5-h)-2}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(5-h)-2}{h}$$

$$=\frac{2-1}{5}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(5+(-h))-f(5)}{h}=-\frac{1}{5}\lim_{h\to 0}\frac{f(5+(-h))-f(5)}{-h}$$

$$-\frac{1}{5}\lim_{t\to 0}\frac{f(5+t)-f(5)}{t}=-\frac{1}{5}f'(5)$$

$$f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}\Rightarrow f'(x)=1\times\sqrt[3]{x+3}+\frac{x-4}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$f'(5)=\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}=2+\frac{1}{3\times 4}=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$$

$$-\frac{1}{5}f'(5)=-\frac{1}{5}\times\frac{25}{12}=-\frac{5}{12}$$

۱۰)

$6y = 3x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \Rightarrow$ شیب $= \frac{1}{2} \Rightarrow$ شیب $= -2$

خط مماس

$y' = 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 - 4 + 5 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$