نگین تکوش — دوازدهم ریاضی A — تکلیف ۲۲

۱- برای بررسی پیوستگی باید در نقطه مرزی بررسی کنیم

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1\end{cases} \rightarrow \boxed{a+1=b}$$

$$\frac{2}{2\sqrt{x^2}}=\frac{b\times 2x}{3\sqrt[3]{x^4}} \rightarrow$$ فقط در یک نقطه صدق کند

$$\frac{1}{x^2}=\frac{2b}{3} \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

$$a=\frac{1}{2}$$

$$a+b=2$$

۲-

$$f(x)=\frac{|2x-2|}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f'(1)=\frac{-|2x-2|}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2-2x}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt[3]{x^2}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}(2-2x)}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$=\frac{-2-\frac{2}{3}(2)}{1}=\frac{-\frac{10}{3}}{1}=-\frac{10}{3}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2-x+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{(-1+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3x}})(\sqrt[3]{x^2})-\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}(\ldots)}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$=\frac{-1+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{3}(1+\sqrt{3})}{1}=\frac{-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}}{1}=-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\rightarrow 2g'(1)=-\frac{10}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(1)-2g'(1)=\cancel{-\frac{10}{3}}+\cancel{\frac{10}{3}}+\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

۳-

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x\geq a\end{cases}$$

برای بررسی پیوستگی: $ba+c=\frac{1}{a}\rightarrow ba^2+ca=1$, $-1$, $ca=2$

برای مشتق: $b=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow b=-\frac{1}{a^2}$

$$ba^2=-1$$

۴- ابتدا پیوستگی را بررسی می‌کنیم

$$f(x)=\begin{cases} b & x<a \rightarrow f'_-(a)=0 \\ b+(x-a)^m & x\geq a \rightarrow f'_+(a)=m(x-a)^{m-1}\end{cases}$$

$b=b+0$ ✓

سپس باید به مشتق نگاه کنیم

$$\Rightarrow m=1\rightarrow f'_+(a)=1$$

که فقط به ازای $m=1$ پیوستگی دارد اما مشتق ندارد

ه -

$(f\circ g)' = 1 \longrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\cancel{x^2}}\ \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2g}} = (f\circ g)'''$

$g'(-\sqrt[3]{2})\ f'(g(-\sqrt[3]{2}))$

$y = -ax - ۵ \longrightarrow \quad y = -۳a - ۵ \quad \longrightarrow f'(۳) = -a$

$-a - (-۳a - ۵) = \underbrace{-a + ۳a}_{۲a} + ۵ = ۲$

$۲a = -۳ \rightarrow a = -\frac{۳}{۲} \quad \longrightarrow f(۳) = -\frac{۱}{۲}$

$\hookrightarrow f'(۳) = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۱}{۳}$

۷-

$(fog)' \Rightarrow \quad fog = (x[\frac{x^۲}{۲}+\frac{۱}{۲}])^۲+۱ = ۱۶x^۲+۱$

$(fog)'_{(۲)} = ۳۲x = ۶۴$

$g(\frac{۲}{\sqrt{۸}}) = \dfrac{۱}{\sqrt[۲]{\cancel{\frac{۴}{۸}}-۱}} \quad \frac{۱}{۸} = ۲$

$(fog)' = \underbrace{g'(۲)}_{\substack{-\cancel{\frac{۱۶}{\sqrt{۲}}} \\ -۸\sqrt{۲}}} \; \underbrace{f'(g(\cancel{\frac{۲}{\sqrt{۸}}}))}_{\substack{۲ \\ ۶۴}} =$

$g(x) = (x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}}$

$g'(x) = -\frac{۱}{۲}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}}$

$g'(\frac{۲}{\sqrt{۸}}) = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{\sqrt{۸}} \times \cancel{۲^{-۳} \times -\frac{۳}{۲}} \; \frac{}{۱۶} = \frac{۳۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{-۱۶}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = -۸\sqrt{۲}$

$\dfrac{۶۴ \times -۸\sqrt{۲}}{-۱۲۸\sqrt{۲}} = ۴$

$f'(-1) = \frac{۳}{۲} \quad \to f'(۴) = \frac{۳}{۲}$

$g'(x) = f'(x+1) + ۳ f'(۳x+۱۰)$

$g'(-۲) = \underbrace{f'(\cancel{-1})}_{\frac{۳}{۲}} + ۳ \underbrace{\cancel{f'(۴)}}_{\frac{۵}{۲}} \quad \to g'(۲) = ۶$

$\lim \frac{f^{۲}(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{-h^{۲}+۵h} \overset{\frac{۰}{۰}}{\underline{\underline{HOP}}} \frac{-۲ \overset{۲}{f(\cancel{۵-h})}\, f'(\overset{\frac{۲۵}{۱۲}}{\cancel{۵-h}}) + ۳ f'(\overset{\frac{۲۵}{۱۲}}{\cancel{۵-h}})}{\underbrace{\cancel{-۲h+۵}}_{۵}} = \frac{-\frac{۲۵}{۳} + \frac{۲۵}{۴}}{۵}$

$= \frac{-\frac{۲۵}{۱۲}}{\frac{۵}{۱}} = \frac{-۵}{۱۲}$

$f(۵) = ۱ \times \sqrt[۳]{۸} = ۲$

$f'(۵) = \sqrt[۳]{x+۳} + \frac{1}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}+۶x+۹}}(x-۵) = ۲ + \frac{1}{۳\times۴} \times ۱ = \frac{۲۵}{۱۲}$

$۴y - ۲x = ۱$

$۴y = ۲x + ۱$

$y = \frac{۲}{۴}x + \frac{۱}{۴} \rightarrow m = \frac{۱}{۲} \longrightarrow \underbrace{m' = -۲}$

$f(x) = x^۲ - ۴x + ۵ \rightarrow f'(x) = ۲x - ۴ = -۲$

$۲x = ۲ \rightarrow x = ۱ \rightarrow (۱, ۲)$

$۱ - ۴(۱) + ۵ = ۲$