۱۷

روزبه قشودیان

① $f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^۲} & x<۱ \\ b\sqrt[۳]{x^۲} & x\geq ۱\end{cases} \longrightarrow a+x \quad x<۱$

$\xrightarrow{\text{پیوستگی تابع}} a+۱=b \longrightarrow a-b=-۱$ ①

$\xrightarrow[\text{بپذیرد}]{\text{در یک نقطه مشتق}} f'(x)=\begin{cases} ۱ & x<۱ \\ b\dfrac{۲x}{۳\sqrt[۳]{x}} & x\geq ۱\end{cases}$ ②

$\xrightarrow{\text{در ① مشتق}} ۱=\frac{۲}{۳}b \longrightarrow \boxed{b=۱/۵}$ ② $\xrightarrow{① , ②} a-۱/۵=-۱ \longrightarrow \boxed{a=۰/۵}$

بپذیرد در ۰ مشتق ناپذیر است

$a+b=۲$

② $f(x)=\dfrac{|۲x-۴|}{\sqrt[۳]{x^۲}}$ $g(x)=\dfrac{\sqrt{(x-۲)^۲}+\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$ $f'(۱)-۲g'(۱)=?$

(۱,۵)

$f'(۱)=\dfrac{-۲(۱)-\frac{۲}{۳}(۲)}{۱}=\dfrac{-۱۰}{۳}$

$\xrightarrow{x=۱} f(x)=\dfrac{۴-۲x}{\sqrt[۳]{x^۲}}$ $g(x)=\dfrac{۲-x+\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$

$g'(۱)=\dfrac{\left(-۱+\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}\right)-\frac{۲}{۳}(۱+\sqrt{۳})}{۱}=-\frac{۵}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

$f(x)-۲g(x)=\dfrac{۴-۲x-۲(۲-x+\sqrt{۳x})}{\sqrt[۳]{x^۲}}=\dfrac{\cancel{۴}-\cancel{۲x}-\cancel{۴}+\cancel{۲x}-۲\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$

$f(x)-۲g(x)=-\dfrac{۲\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}} \xrightarrow[\text{مشتق}]{} f$

$f'(۱)-۲g'(۱)=\frac{-۱۰}{۳}-۲\left(\frac{-۵}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$f'(x)-۲g'(x)=-\dfrac{\left(\left(\frac{۶}{۲\sqrt{۳x}}\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲}\right)+\left(\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\right)\left(۲\sqrt{۳x}\right)\right)}{\left(\sqrt[۳]{x^۲}\right)^۲}$

$\xrightarrow{x=۱} -\dfrac{\left(\left(\frac{۶}{۲\sqrt{۳}}\right)+\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(۲\sqrt{۳}\right)\right)}{۱}=-\left(\sqrt{۳}+\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)$

$=-\dfrac{۷\sqrt{۳}}{۳}$

$۶ \quad \frac{۳}{\sqrt{۳}} \quad \frac{۳\sqrt{۳}}{\cancel{۳}}$

۳) $f(x) = \begin{cases} bx + c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$

مقدار برابر $\longrightarrow ab + c = \frac{1}{a}$ $\quad a^2b + ac = 1$ ①

۲

$\longrightarrow a(ab + c) = 1$

مشتق برابر $\longrightarrow b = -\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x=a} b = -\frac{1}{a^2} \longrightarrow a^2 b = -1$ ②

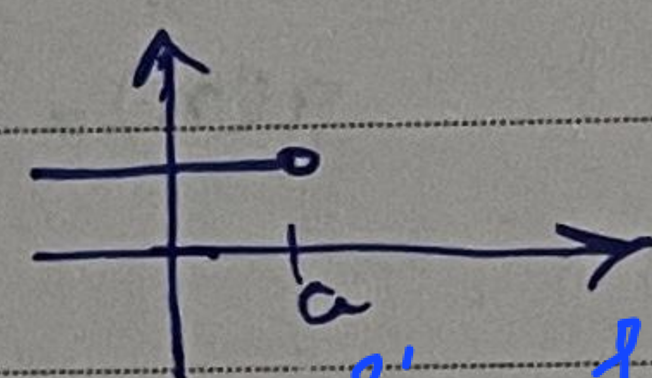
②,① $\longrightarrow -1 + ac = 1 \longrightarrow \boxed{ac = 2}$

---

۴) ① $\boxed{0 \leq m}$ $\quad (a\ \ b) \longrightarrow$ گوشه

نقطه گوشه $f \rightarrow f'_-(a) \neq f'_+(a)$

$f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$



$m = 0 \rightarrow f'_-(a) = f'_+(a)$ × غلط

$f'(x) \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x > a \end{cases}$

$m = 1 \rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 1 \end{cases} \rightarrow f'_-(a) \neq f'_+(a)$

$\longrightarrow$ مشتق عبارت در هر صورت تعریف شده است مگر اینکه $(x-a)$ در مخرج قرار بگیرد $\longrightarrow m - 1 < 0$ ② $\boxed{m < 1}$

۱/۵

②,① $\longrightarrow 0 \leq m < 1,\ m \in \mathbb{Z} \longrightarrow m = 0$ $\quad$ ① مقدار

---

۵) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + [x]}}$ $\qquad g(x) = \frac{1}{2x^3}$

۲

$(fog(-\sqrt[3]{2}))' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\left(\frac{1}{2x^3}\right)}}\right)' = (x)' = 1$

6) $y = -ax - 5 \quad \Big|_{\,-3a-5}^{\,3} \qquad f(3) = -3a - 5$

$y' = -a \qquad f'(3) = -a$

$f'(3) - f(3) = 2 \longrightarrow -a + 3a + 5 = 2 \qquad 2a = -3 \quad \boxed{a = -\frac{3}{2}}$

$y = +\frac{3}{2}x - 5 \longrightarrow f(3) = \frac{9}{2} - 5 = -\frac{1}{2} \qquad f'(3) = \frac{3}{2}$

$\frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$

2

---

7) $f(x) = \left(x\left[x^2 + \frac{1}{4}\right]\right)^2 + 1 \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

1

$(fog)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \xrightarrow{\frac{3}{\sqrt{8}}} \frac{3}{\sqrt{8}} > x$

$\rightarrow x^2 < \frac{9}{8} \longrightarrow x^2 - 1 < \frac{1}{8} \qquad \sqrt[3]{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$

$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} > 2 \xrightarrow[\text{براکت صحیح}]{\text{چون داخل}}$

$fog = (4g(x))^2 + 1 \longrightarrow (fog)' = 2(4g(x))\,4g'(x)$

$2 \times 4 \times 2 \times 4 \times \frac{12}{3\sqrt{2}}$

$g'(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x$

$\frac{1}{3} \times 2^4 \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{12}{3\sqrt{2}}$

$f(x) = 16x^2 + 1 \longrightarrow f'(x) = 32x \longrightarrow f'(2) = 64$

$y' = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) f'(2) = -8\sqrt{2} \times 64 = 4 \times (-128\sqrt{2}) \longrightarrow$ ۴ برابر

$-\frac{\cancel{64} \times 12}{3\sqrt{2} \times \cancel{128}\sqrt{2}} = -1$

$y = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x) f'(g(x)) \xrightarrow{x = \frac{3}{\sqrt{8}}} y' = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) f'\Big(\underbrace{g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)}_{2}\Big) \longrightarrow y' = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) f'(2)$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} = (x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \longrightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = -\frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}$

$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{8}} \times 2^4 = -\frac{2^4 \times \sqrt{2}}{2} = -2^3\sqrt{2} \longrightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -8\sqrt{2}$

Arman

۸ $g'(x) = f'(x+1) + ۳f'(۳x+۱۰)$

$\xrightarrow{x=-۲} g'(-۲) = f'(-۱) + ۳\cancel{f'(۴)} = g'(-۲) = ۴f'(-۱)$ ۲

$g'(-۲) = ۴ \times \frac{۳}{۲} \rightarrow \boxed{g'(-۲) = ۶}$

---

۹ $\cancel{\lim_{h\to 0} \frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}}$

$\cancel{\lim_{h\to 0} \frac{۲f(۵-h)(-f'(۵-h)) + ۳f'(۵-h)}{-۲h}}$

$-۲f(۵)f'(۵) + ۳f'(۵)$

$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-۲f'(۵-h)f(۵-h) + ۳f'(۵-h)}{۵-۲h} =$

$\frac{-۲f'(۵)f(۵) + ۳f'(۵)}{۵} = \frac{-۲\times\frac{۲۵}{۱۲}\times ۲ + ۳\times\frac{۲۵}{۱۲}}{۵} = \frac{-۵}{۱۲}$

$f(۵) = ۲$

$f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳} \longrightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + (x-۴)\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$

$\rightarrow f'(۵) = ۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲}$

۱

۹ $f(x) = (x-۴)\sqrt{x+۳} \quad f(۵) = ۲$

$\lim_{h\to 0} \frac{(f(۵-h)-۲)(f(۵-h)-۱)}{h(۵-h)} \quad \frac{۱}{۳}$

$\frac{0}{0}$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(۵-h)-۲}{h} \times \frac{۱}{۳}$

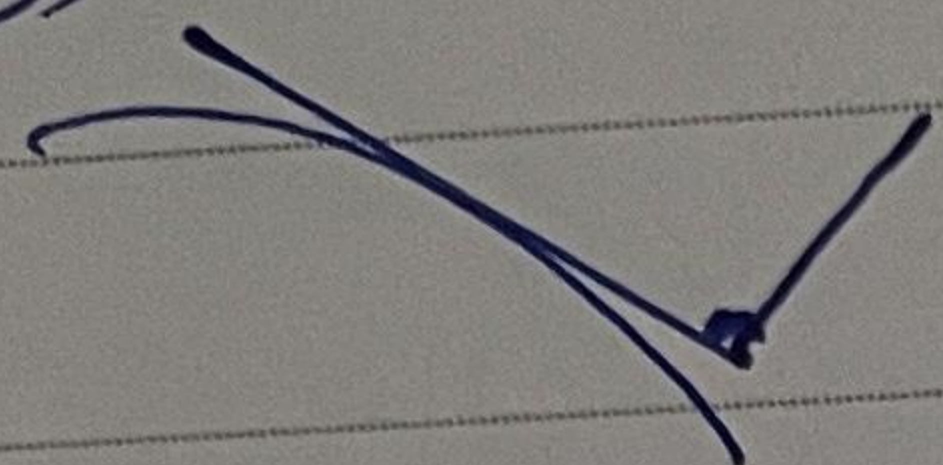
$\xrightarrow{hop} \frac{-f'(۵-h)}{۱} \times \frac{۱}{۳} = -\frac{f'(۵)}{۳}$

$(۱)(\sqrt[۳]{x+۳}) + (\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}})(x-۴)$

$۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲۵}{۳۶}$

Arman

(۱۵



$y = \frac{۱ + ۲x}{۴}$ $y = \frac{۱}{۴} + \frac{x}{۲}$ $m = \frac{۱}{۲} \rightarrow m' = -۲$

$۲x = ۲$ $x = ۱$

$y = x^۲ - ۴x + ۵ \rightarrow y' = ۲x - ۴ = -۲$

$\xrightarrow{\text{نقطه}} \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix} \right.$

۲