$$y = a+\sqrt{x^2} = a+|x| \begin{cases} 0<x<1 \to a+x \to y'=1 \\ x<0 \to a-x \to y'=-1 \end{cases}$$ تمام ناپیوستگی ①

چون تمام ناپیوستگی این تابع در فقط نقطه اول است پس باید ضابطه اول و دوم به ازای $x=1$ مشتق‌پذیر باشند

(I)
$$\begin{cases} y = b\sqrt[3]{x^2} \to y' = b\times\dfrac{2\times 2x}{3\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{x=1} \dfrac{4}{3}b = y' \\ y = a+|x| \to y'=1 \xrightarrow{x=1} y'=1 \end{cases}$$ باید باهم برابر باشند

$$\frac{4}{3}b = 1 \to \boxed{b=\frac{3}{4}}$$

(II)
$$x=1 \begin{cases} a+|x| = a+1 \\ b\times\sqrt[3]{x^2} = b\times 1 = b = \dfrac{3}{4} \end{cases} \to a+1 = b = \frac{3}{4} \to a = -\frac{1}{4}$$

$$\to \boxed{a+b = +\frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

۳

$$f(x)=\frac{|3x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}\xrightarrow[1<2]{x=1}\frac{4-3x}{\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-3\left(\sqrt[3]{x^2}\right)-(4-3x)\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}\xrightarrow[1<2]{x=1}\frac{2-x+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\to g'(x)=\frac{\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{3x}}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}\right)-\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)\left(2-x+\sqrt{3x}\right)}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\to f'(1)=\frac{-3(1)-(1)\left(\frac{2}{3}\right)}{1}=\frac{-11}{3}$$

$$\to g'(1)=\frac{\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1)-\left(\frac{2}{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}{1}=\frac{-7-4\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(1)-2g'(1)=\frac{-11}{3}+\frac{7+4\sqrt{3}}{3}=\boxed{\frac{4\sqrt{3}-4}{3}}\to 2$$

---

۵ برای مشتق‌پذیری به ازای R باید هم مشتق ۲ ضابطه و هم حاصل خود ۲ ضابطه به ازای a باهم برابر باشد.

$$y=bx+c\to y'=b \quad , \quad y=\frac{1}{x}\to y'=-\frac{1}{x^2}$$

$$x=a\begin{cases}\boxed{b=\frac{-1}{a^2}}\\ ba+c=\frac{1}{a}\end{cases}\to\frac{-1}{a^2}\times a+c=\frac{1}{a}\to\boxed{c=\frac{2}{a}}$$

$$a\times c=a\times\frac{2}{a}=2\to 2$$

۴

$$y=b\to y'=0 \quad , \quad y=b+(x-a)^m\to y'=m(x-a)^{m-1}$$

اگر $x=a$ باشد مشتق ضابطه دوم هم صفر می‌شود و در نتیجه به ازای تمام R مشتق‌پذیر است. پس

این ضابطه باید یک ضابطه درجه یک باشد تا در مشتق آن x حذف شود و ببینی:

$m=1\to y'=1(x-a)^0=1\to$ فقط یک مقدار m می‌تواند در مشتق x را حذف کند

$g'(\sqrt[3]{2}) \times f'(g(-\sqrt[3]{2})) = (f\circ g)'(-\sqrt[3]{4})$ ب

$x<0 \to g(x) = \frac{1}{2x^3}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} \to f\circ g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\times\frac{1}{2x^3}}}$

$\Rightarrow f\circ g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

$f\circ g(-\sqrt[3]{4}) = -\sqrt[3]{2} \to 2$

---

۶ شیب خط مماس = شیب تابع f در نقطه ۳ و هر دو در نقطه ۳ y های یکسانی دارند:

$f'(3) = -a$, $f(3) = -3a-5 \Rightarrow -a-(-3a-5) = 2$

$\to 2a+5 = 2 \to 2a = -3 \to a = -\frac{3}{2}$

$f(3) = +\frac{9}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{1}{2}$, $f'(3) = \frac{3}{2}$

$\to \frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \to 2$

---

۷ $(f\circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$

$f(x) = \left(x\left[\frac{9}{8}+\frac{4}{8}\right]\right)^2 + 1 = (x\times 1)^2 + 1 = x^2+1 \to f'(x) = 2x$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}} \longrightarrow g'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4-1}}$

$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{2\times\frac{3}{\sqrt{8}}}{3\times\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}} = \frac{\frac{6}{\sqrt{8}}}{\frac{3}{2}} = \frac{12}{6\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}} = 2$, $f'(2) = 2\times 2 = 4$

$(f\circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \sqrt{2}\times 4 = 4\sqrt{2}$

$\to \frac{4\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{1}{32}\ \text{برابر}} \to 2$

$g(x) = f(x+1) + f(3x+10) \rightarrow g'(x) = f'(x+1) + f'(3x+10)$ ۸

$g'(-2) = f'(-2+1) + f'(-6+10) = f'(-1) + f'(4)$

چون دوره تناوب ۵ است پس یعنی ۵ تا ۵ تا شیب‌ها تکراری شوند و باهم برابرند.

$-1+5=4 \longrightarrow f'(-1) = f'(4)$

$g'(-2) = \frac{3}{2} \times 2 = 3 \rightarrow 2$.

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\overbrace{(f(5-h)-2)}^{f'(5)} \times (f(5-h)-1)}{-h(h-5)}$ ۹

$f(5) = 1 \times 2 = 2 \Rightarrow f'(5) \times \frac{f(5)-1}{-5}$

$f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + (x-4)\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \longrightarrow f'(5) = 2 + \left(1 \times \frac{1}{3\times 4}\right) = \frac{25}{12}$

$\Rightarrow \frac{25}{12} \times \frac{2-1}{-5} = -\frac{5}{12} \rightarrow 2$.

$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y' = 2x - 4$ ۱۰

$4y - 2x = 1 \rightarrow y = \frac{2}{4}x + \frac{1}{4} \rightarrow m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow m \times m' = -1$

$\rightarrow m' = -2 \rightarrow 2x - 4 = -2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

$\rightarrow y = 1 - 4 + 5 = 2 \longrightarrow$ $\boxed{\text{نقطه } (1,2)} \rightarrow 2$