دوازدهم A 14/75 تمرین

سوال ۱-

$$f(x)\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & ; x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\geq 1\end{cases} \longrightarrow \text{پیوسته در } \mathbb{R}$$

باید در $x=1$ → در نقطه ناپیوستگی

$x=1 \longrightarrow a+1=b$

$$\lim \begin{cases} a+|x| \xrightarrow{x>0} a+1=b \\ b\sqrt[3]{x^2}\end{cases}$$

$$b\sqrt[3]{x^2} \longrightarrow (a+1)\sqrt[3]{x^2} \xrightarrow[a\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}]{} f'(x)=\frac{2xa}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2xa}{3x\sqrt[3]{x}}+\frac{2x}{3x\sqrt[3]{x}}=\frac{2a+2}{3\sqrt[3]{x}}=1 \rightarrow 2a+2=3\sqrt[3]{x} \xrightarrow{x=1}$$

$$a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

$$\rightarrow 2a+2=3 \rightarrow 2a=1 \rightarrow a=\frac{1}{2} \qquad \rightarrow a+b=\cancel{\frac{5}{2}}$$

$$b=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

1/75

سوال ۲

$$f(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(1)-2g'(1)=?$$

$$f(x)=\frac{-2x+4}{\sqrt[3]{x^2}} \longrightarrow f'(x)=\frac{-2\left(\sqrt[3]{x^2}\right)-\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}(-2x+4)}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2}$$

$$f'(1)=-2-\frac{2}{3}(2)=-2-\frac{4}{3}=\frac{-10}{3}$$

$$g(x)=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{3x}}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}\right)-\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}\left(2-x+\sqrt{3x}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2}$$

$$\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{-2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{3}\right) \longrightarrow \frac{-6\sqrt{3}+9-4\sqrt{3}-12}{6\sqrt{3}} \rightarrow$$

$$\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \frac{-10\sqrt{3}-3}{6\sqrt{3}}$$

2

ادامه سوال ۲ _

$$f'(1)-2g'(1)=-\frac{10}{3}-2\times\frac{-10\sqrt{3}-3}{6\sqrt{3}}=\frac{-10\sqrt{3}+10\sqrt{3}+3}{3\sqrt{3}}=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سوال ۳ _

$$f(x)\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x\geq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{مشتق‌پذیر در } \mathbb{R} \qquad ac=?$$

۲

$$\xrightarrow{x=a} ab+c=\frac{1}{a} \rightarrow b=-\frac{1}{a^2} \rightarrow -\frac{1}{a}+c=\frac{1}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow c=\frac{2}{a} \rightarrow \boxed{ac=2}$$

سوال ٤ _

$$f(x)=\begin{cases} b & ;\ x<a \\ b+(x-a)^m & ;\ x\geq 0 \end{cases}$$

۲

$f'_-(a)=0$ ، $f'_+(a)\neq 0$

$\xrightarrow{m=0} f'_+(a)=0 \rightarrow$ تناقض

$\xrightarrow{m=1} f'_+(a)=1 \rightarrow$ درست $\rightarrow$ فقط به ازای $m=1$ امکان دارد

سوال ۵ _

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} \qquad g(x)=\frac{1}{x^3-|x^3|}$$

۲

$$g'(-\sqrt[3]{2})\,f'(g(-\sqrt[3]{2}))=\left(fog(-\sqrt[3]{2})\right)' \Rightarrow fog(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3}-\left|\frac{1}{2x^3}\right|}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}}=x \longrightarrow \text{مشتق } x = 1$$

سوال ۶_

$y = -ax - \omega$ $\qquad f'(۳) - f(۳) = ۲$

$\frac{f(۳)}{f'(۳)} = ?$

۲

$-a + ۳a + \omega = ۲a + \omega = ۲ \to f'(۳) = a$

$\to f(۳) = -۳a - \omega$ $\qquad \to ۲a = -۳ \to$

$\to a = -\frac{۳}{۲} \to \frac{f(۳)}{f'(۳)} = \frac{\frac{۹}{۲} - \omega}{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۱}{۳}$

سوال ۷

$f(x) = (x[x^۲ + \frac{۱}{۲}])^۳ + ۱ \qquad g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}$

$(f\circ g)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) \to g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})\, f'(\underbrace{g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})}_{۲}) \to g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) \times f'(۲)$

۲

$[x^۲ + \frac{۱}{۲}] = ۴ \to f'(x) = ۳۲x \to ۶۴$

$g'(x) = -\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}} = \frac{-\frac{۳}{\sqrt{۲}}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{-۴}{\sqrt{۲}} = \frac{-۴\sqrt{۲}}{۲}$

$\frac{-۲\sqrt{۲} \times ۶۴}{-۱۲۸\sqrt{۲}} = ۱$

سوال ۸_

$g'(x) = f'(x+۱) + ۳f'(۳x+۱۰)$ $\qquad f'(-۱) = f'(۴) = \frac{۳}{۲}$

$g'(-۲) = f'(-۱) + ۳f'(۴)$

۲

$g'(-۲) = \frac{۳}{۲} + \frac{۹}{۲} = ۶$

Scbo

۹-

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(\omega - h) - 3f(\omega - h) + 2}{h(\omega - h)}$$

$f(x) = (x - 4)\sqrt[3]{x+3}$

$t = f(\omega - h)$

$$\frac{t^2 - 3t + 2}{h(\omega - h)} = \frac{(t-1)(t-2)}{h(\omega - h)}$$

$$\frac{f(\omega - h) - 1}{\omega - h} \times \frac{f(\omega - h) - 2}{h} = \frac{f'(\omega)}{\omega} = -\frac{\omega}{12}$$

۲

۱۰-

$4y = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \longrightarrow m = \frac{3}{4}$

$-\frac{4}{3} \leftarrow$ قرینه معکوس

$3x - 4 = -\frac{4}{3}$

$x = 1 \rightarrow \boxed{(1, 2)}$

۲