کیمیا بیگی آبادی

۱

$$g(x)=f(\underbrace{\tan^2x+\sqrt{2}\cos x}_{h(x)}) \to g'(x)=(2\times(1+\tan^2x)\times\tan x)\times f'(\tan^2x+\sqrt{2}\cos x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} (\underbrace{2(1+1)}_{4}\times1)\, f'(1+\frac{\cancel{\sqrt2\times\sqrt2}}{\cancel{2}})=\sqrt3 \to 4f'(2)=\sqrt3 \to \boxed{f'(2)=\frac{\sqrt3}{4}}$$

۲

$$f(x)=\frac{8+\cos^3x}{4-\cos^2x} \qquad g(x)=-2\times\frac{2(2+\cos x)}{(2-\cos x)(2+\cos^2x)}$$

$$f(x)-2g(x)=\frac{\cos^3x-4\cos x}{\cancel{4-\cos^2x}} \quad -\cos x\,(\cancel{4-\cos^2x})$$

$$=-\cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} =\sin x$$

$$\xrightarrow{x=\frac{7\pi}{6}} \sin\frac{7\pi}{6}=\frac{-1}{2}$$

۳

$$f(x)=|4x-3|\sqrt{ax} \to f'_+(x)=4\sqrt{ax}+(4x-3)\frac{a}{2\sqrt{ax}} \xrightarrow{x=\frac34} =\frac{\cancel{4}^{\,2}\sqrt{3a}}{\cancel{2}}$$

$$(f(x)=(4x-3)\sqrt{ax})$$

$$\to f'_-(x)=-4\sqrt{ax}+(-4x+3)\frac{a}{2\sqrt{ax}} \xrightarrow{x=\frac34} =-2\sqrt{3a}$$

$$(f(x)=(-4x+3)\sqrt{ax})$$

$$2\sqrt{3a}-(-2\sqrt{3a})=\underbrace{\cancel{4\sqrt{3a}}}_{\substack{2\times2\\ 2\sqrt{12a}}}=2\sqrt6 \to a=\frac12$$

۴

$y=-ax+2$ مماس در $x=4$

$$\cancel{f(4)+f'(4)}=-1 \qquad -4a+2 \quad -a$$

$$-5a=-3 \to a=\frac35 \qquad f'(4)=-a=-\frac35$$

۵

$y=\frac17x+\frac57$ مماس $\qquad y=\frac{ax-1}{3x+1} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{a+3}{3x+1}$

شیب ← $\frac17$

$$\frac{ax-1}{3x+1}=\frac{5+x}{7} \to 7ax-7=3x^2+16x+5 \to 3x^2+(16-7a)+12=0$$

چون مماس
۱ نقطه برخورد

$$\Delta=0 \to (16-7a)^2-4\times3\times12=0$$

$$49a^2-\underbrace{32\times7a}+\underbrace{256-144}_{112}=0 \qquad a=\frac47 \text{ یا } a=4$$

$$(7a-4)(7a-28)$$

۶

$f(x) = x^۳ + ax - b$ } $\longrightarrow x^۳ + ax - b = ۰ \xrightarrow[x=۲]{} ۸ + ۲a - b = ۰$

محور x ها $\rightarrow y = ۰$

$۲a - b = -۸$ ★

$f'(x) = ۳x^۲ + a \xrightarrow[x=۲]{} ۱۲ + a = ۰ \rightarrow a = -۱۲ \xrightarrow[★]{} -۲۴ - b = -۸$

مشتق در $x=۲$ ← صفر است ← چون بر محور x ها مماس است

$b = -۱۶$

$b - a = -۱۶ + ۱۲ = -۴$

۷

$\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{f(x)f'(x)}{(۱-\cos x)^m} = ۳۲\sqrt{۲}$ $\quad f'(۰) = \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \dfrac{\sin^n(x^۲)}{x} = \dfrac{x^{۲n}}{x} = x^{۲n-۱}$

$۳۲\sqrt{۲} = \dfrac{\overset{x^{۲n}}{\cancel{\sin^n(x^۲)}}(x^{۲n-۱})}{\underset{\frac{x^۲}{۲}}{\cancel{(۱-\cos x)}}^m} = \dfrac{x^{۴n-۱} \times ۲^m}{x^{۲m}} = ۳۲\sqrt{۲}$

$\xrightarrow{x=۰} ۲^m = ۳۲\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱۱}{۲}} \rightarrow m = \frac{۱۱}{۲}$ $\quad ۴n - ۱ = ۲(m) \rightarrow n = ۳$

$۲m + n = ۱۱ + ۳ = ۱۴$

۸

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱} \rightarrow f^{-۱}(x) \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{y}+۱}{\sqrt{y}-۱} \rightarrow y = \left(\dfrac{x+۱}{x-۱}\right)^۲$

$\left(f^{-۱}(x)\right)' = ۲\left(\dfrac{x+۱}{x-۱}\right)\left(\dfrac{-۲}{(x-۱)^۲}\right) \xrightarrow[x=۲]{} ۲ \times \dfrac{۳}{۱} \times (-۲) = -۱۲$

۹

$f(x) = (x^۲+۱)^۳(ax+۱) \xrightarrow[x=-۱]{} ۸(-a+۱)$

$\xrightarrow{x=۰} ۱$

$\dfrac{۱ - ۸(-a+۱)}{۰ - (-۱)} = -۱۱$ $\quad (۱ + ۸a - ۸)$

$۸a - ۷ = -۱۱$

$۸a = -۴ \rightarrow a = \dfrac{-۱}{۲}$

$f'(x) = ۳ \times ۲x(x^۲+۱)^۲\left(-\frac{۱}{۲}x + ۱\right) + (x^۲+۱)^۳\left(-\frac{۱}{۲}\right)$

$x = -۲a = ۱$

$\xrightarrow{x=۱} ۶ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} + ۸ \times \left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۱۲ - ۴ = ۸$

10

$y = \sin x \cos 2x$

$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} 1 \times (-1) = -1$

$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0}$

$\frac{-1}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$

$y = \cancel{\sin^2 x - \cos^2 x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} -(-1) = 1$

$\cancel{\sin^2 x - \cos^2 x}$

$-\cos 2x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} 0$

$\frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$

$\frac{-\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = -1$