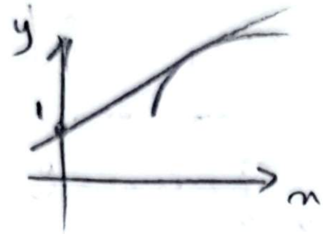
۱۵ (اها ۱۱سی)

۱) نقطه‌ی تماس $\frac{۳}{۵}$ است $f'(۲)=?$




شیب خط مماس: $f'(۲)$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\quad 1\,{}^{۳}_{۵}\quad 1\,{}^{۰}_{۱}$

جواب $\longleftarrow \boxed{\frac{۴}{۳}}$ ✓ ۲

---

۲) $m=\dfrac{2-1}{2-(-1)}=\dfrac{1}{3}\xrightarrow[\text{عمومی خط}]{\text{معادله خط}} y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

$\sqrt{ax-1}=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\longrightarrow ax-1=\left(\dfrac{x+4}{3}\right)^2$ ۲

$ax-1=\dfrac{x^2+8x+16}{9}\longrightarrow 9ax-9=x^2+8x+16$

$\longrightarrow x^2+8x-9ax+25=0\xrightarrow[b^2-4ac=0]{\Delta=0}(8-9a)^2=100$ $\to a=2$ ق ق / $\to a=-\frac{2}{9}$ غ ق ق ✓

$\to a=2\longrightarrow f(x)=\sqrt{2x-1}\longrightarrow f(5)=\sqrt{10-1}=3$ جواب

---

۳) $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+3}\longrightarrow y'=\dfrac{(2x+m)(x+3)-x^2-mx-1}{(x+3)^2}$

$y'(1)=\dfrac{(2+m)\times 4-(1+m+1)}{16}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow 4(m+2)-2-m=12$

$4m+8-2-m=12\longrightarrow 3m=6\longrightarrow \boxed{m=2}$ ۲

$y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}\xrightarrow{x=1}y=\dfrac{1+2+1}{1+3}=1\Rightarrow(1,1)\,A$

$(4\times1)-(3\times1)=n\Rightarrow\boxed{n=1}$ $\quad m+n=2+1=3$ ✓ جواب

$$3g'\left(\frac{5\pi}{3}\right)-f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=(3g-f)'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$ ④

$$\frac{3\times 3}{3+\sin x}-\frac{27-\sin^3 x}{9-\sin x}=\frac{9}{3+\sin x}-\frac{(\cancel{3-\sin x})(9+\sin^2 x+3\sin x)}{(\cancel{3-\sin x})(3+\sin x)}$$

$$\rightarrow (3g-f)(x)=\frac{9-9-\sin^2 x-3\sin x}{3+\sin x}=\frac{-\sin x(3+\sin x)}{3+\sin x}=-\sin$$

$$(3g-f)(x)=-\sin x \xrightarrow[\text{می‌شود}]{\text{حال مشتق}} (3g-f)'(x)=-\cos x$$ ۲

$$\xrightarrow{x=\frac{5\pi}{3}} (3g-f')\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\cos\frac{5\pi}{3} \longrightarrow -1\times +\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

جواب

$$g'(\sqrt[5]{3})\,f(g(\sqrt[5]{3})) \longrightarrow (f\circ g)'(x)$$ ⑤

$$g(x)=\frac{1}{x^5+|x^5|}\longrightarrow\frac{1}{2x^5}$$

$$f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+|x|}}\longrightarrow\frac{-1}{\sqrt[5]{2x}}$$

$$f\circ g(x)\longrightarrow\frac{-1}{\sqrt[5]{2\left(\frac{1}{2x^5}\right)}}\Rightarrow f\circ g(x)=-x$$ ۲

$$f\circ g'(x)=-1\longrightarrow (f\circ g')(\sqrt[9]{3})=-1$$

۶

$$f(x) = \left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)^2 = \frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}$$

$$\frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1 - \sin^2 x - 2\sin x - 1}{(\sin x + 1)^2} = \frac{-4\sin x}{(\sin x + 1)^2} = x g(x)$$

$$g(x) = \frac{-4\sin x}{x(\sin x+1)^2} \longrightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = \frac{-4\sin x}{x(\sin x+1)^2}$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{x(x+1)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{رفع ابهام}} \lim_{x\to 0} \frac{-4}{(x+1)^2} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{x=0} \frac{-4}{1} = -4$$

---

۷

$$y = x^2 + 1 \xrightarrow[\text{محور x}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(x^2+1)$$

$$f(x) = -x^2 - 1 \qquad f'(x) = -2x$$

$$f'(a)f'(-a) = -1 \longrightarrow (-2a)(2a) = -1 \longrightarrow a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{a>0} a = 1/2 \longrightarrow f(1/2) = -\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = -5/4$$

درنتیجه نقطه‌ی $A(1/2\ \ -5/4)$ ← پس معادله‌ی آن به صورت $y=-5/4$ است

و فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات برابر $\frac{5}{4}$ است

درنتیجه جواب برابر می‌شود برابر $\frac{5}{4}$

۸

$f(x) = ۲\sqrt{x}\,(۴x^۲ + ۳)$

مشتق‌گیری ضرب
$\xrightarrow{\text{قاعده}}$

$f'(x) = \dfrac{۲}{۲\sqrt{x}}(۴x^۲+۳) + (۸x) \times ۲\sqrt{x}$

$\hookrightarrow \dfrac{۴x^۲+۳}{\sqrt{x}} + ۱۶x\sqrt{x} \longrightarrow \dfrac{۲۰x^۲+۳}{\sqrt{x}}$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \dfrac{۲\sqrt{a}\,(۴a^۲+۳)}{a} = \dfrac{۸a^۲+۶}{\sqrt{a}} = m$

۲

$\xrightarrow{x=a} f'(a) = \dfrac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}} \longrightarrow f'(a) = m$

$\rightarrow \dfrac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}} = \dfrac{۸a^۲+۶}{\sqrt{a}} \rightsquigarrow ۱۲a^۲ = ۳ \begin{cases} a = \frac{۱}{۲} & \text{ق ق} \\ a = -\frac{۱}{۲} & \text{غ ق ق} \end{cases}$

$\rightarrow m = \dfrac{(۸ \times \frac{۱}{۴}) + ۶}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}} = \sqrt{۲} \times ۸ = \boxed{۸\sqrt{۲}}$

---

۹

$x=a, f(a) = \dfrac{\sqrt{a}}{-۲a^۲+a+۱} \rightarrow f'(x) = \dfrac{\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times (-۲x^۲+x+۱)\right) - \left(\sqrt{x} \times (-۴x+۱)\right)}{(-۲x^۲+x+۱)^۲}$

۱

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \dfrac{\frac{\sqrt{a}}{-۲a^۲+a+۱}}{a} = \dfrac{\sqrt{a}}{a(-۲a^۲+a+۱)} = \dfrac{۱}{\sqrt{a}\,(-۲a^۲+a+۱)}$

$f'(a) = \dfrac{\frac{-۲a^۲+a+۱}{۲\sqrt{a}} - \frac{۸a^۲+۲a}{۲\sqrt{a}}}{(-۲a^۲+a+۱)^۲} \rightsquigarrow m = f'(a) \rightsquigarrow \dfrac{۶a^۲-a+۱}{۲\sqrt{a}\,(-۲a^۲+a+۱)^۲} = \dfrac{۱}{\sqrt{a}\,(-۲a^۲+a+۱)}$

$\rightsquigarrow ۶a^۲ - a + ۱ = -۲a^۲ + a + ۱$

$\rightsquigarrow ۸a^۲ - ۲a = ۰ \rightsquigarrow ۲a(۴a-۱) = ۰$

۰ غ ق ق ، $+\frac{۱}{۴}$ ق ق

$f(a) = \dfrac{\frac{۱}{۲}}{-\frac{۲}{۱۶} + \frac{۱}{۴} + ۱} = \dfrac{۴}{۹}$ جواب

خط $d \rightarrow y = ax$ $\quad A(\alpha, a\alpha)$

$f(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{-۲\alpha^۲+\alpha+۱} = a\alpha \rightarrow a\sqrt{\alpha}\,(-۲\alpha^۲+\alpha+۱) = ۱ \rightarrow -۲a\alpha^{\frac{۵}{۲}} + a\alpha^{\frac{۱}{۲}} + a\alpha^{\frac{۳}{۲}} = ۱$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} -۵a\alpha^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۳}{۲}a\alpha^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲}a\alpha^{-\frac{۱}{۲}} = ۰ \xrightarrow[\times ۲\sqrt{\alpha}]{\div a} -۱۰\alpha^۲ + ۳\alpha + ۱ = ۰ \longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-۱}{۵} \\ \alpha = \frac{۱}{۲} \end{cases}$

$f(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}{-۲(\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲} + ۱} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰

۱

$$(f\circ g)'(x) \longrightarrow g'(x) \times f'(g(x))$$

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\frac{\cancel{2}\times\sqrt{5}}{\cancel{2}}}{2\sqrt{\frac{5}{4}-1}} = \sqrt{5}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{4}{4}}} = 2$$

$$x < \frac{\sqrt{5}}{2} \longrightarrow x^2 < \frac{5}{4} \longrightarrow x^2-1 < \frac{1}{4} \longrightarrow \sqrt{x^2-1} < \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 2 \qquad f(x) = \left(x \times [\cancel{2^+}]\right)^3 \to 8x^3$$

$$\left(f\circ g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)' = g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \times f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) \qquad f'(x) = 24x^2 \xrightarrow{x=2} f'(2) = 24\times 4 = 96$$

$$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \to g'(x) = -\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x \to g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^- - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^-} = 2^+$$

$$\leadsto (f\circ g)'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 96 \times \sqrt{5} = 96\sqrt{5}$$

$$\frac{96\sqrt{5}}{-48\sqrt{5}} = \underbrace{\boxed{-2}}_{\text{جواب}}$$ برابر ← حال باید ببینیم $96\sqrt{5}$ چند برابر $-48\sqrt{5}$ است؟

$$f'(2^+) = \left((2x)^3\right)' = (8x^3)' = 24x^2 = 24\times 4$$

$$\rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right) \times f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) = -4\sqrt{5} \times 4 \times 24 \longrightarrow \frac{24\times 4\times(-4\sqrt{5})}{-48\sqrt{5}} = 8$$