(اها ا سی)

① نقطه‌ی تماس $\left|\begin{matrix}۳\\۵\end{matrix}\right.$ است. $f'(۲) = ?$

شیب خط مماس $= f'(۲)$

$\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix}۳\\۵\end{matrix}\right. \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$

جواب $\longrightarrow \boxed{\frac{۴}{۳}}$

② $m = \frac{۲-۱}{۲-(-۱)} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow[\text{عاملی نمود}]{\text{معادله‌ی خط}} y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳}$

$\sqrt{ax-۱} = \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳} \longrightarrow ax-۱ = \left(\frac{x+۴}{۳}\right)^۲$

$ax-۱ = \frac{x^۲+۸x+۱۶}{۹} \rightarrow ۹ax-۹ = x^۲+۸x+۱۶$

$\rightarrow x^۲+۸x-۹ax+۲۵=۰ \xrightarrow[b^۲-۴ac=۰]{\Delta=۰} (۸-۹a)^۲=۱۰۰$ $\rightarrow a=۲$ ق ق $\rightarrow a=-\frac{۲}{۹}$ غ ق ق

$\rightarrow a=۲ \longrightarrow f(x)=\sqrt{۲x-۱} \longrightarrow f(۵)=\sqrt{۱۰-۱}=$ ③ جواب

③ $y = \frac{x^۲+mx+۱}{x+۳} \longrightarrow y' = \frac{(۲x+m)(x+۳)-x^۲-mx-۱}{(x+۳)^۲}$

$y'(۱) = \frac{(۲+m)\times۴-(۱+m+۱)}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴(m+۲)-۲-m=۱۲$

$۴m+۸-۲-m=۱۲ \longrightarrow ۳m=۶ \longrightarrow \boxed{m=۲}$

$y = \frac{x^۲+۲x+۱}{x+۳} \xrightarrow{x=۱} y = \frac{۱+۲+۱}{۱+۳} = ۱ \Rightarrow (۱,۱)\,A$

$(۴\times۱)-(۳\times۱)=n \Rightarrow \boxed{n=۱}$ $\quad m+n=۲+۱=$ ③

جواب

$$۳g'(\frac{۵\pi}{۳}) - f'(\frac{۵\pi}{۳}) = (۳g - f)'(\frac{۵\pi}{۳})$$ ④

$$\frac{۳\times۳}{۳+\sin x} - \frac{۲۷-\sin^۳ x}{۹-\sin x} = \frac{۹}{۳+\sin x} - \frac{(\cancel{۳-\sin x})(۹+\sin^۲ x+۳\sin x)}{(\cancel{۳-\sin x})(۳+\sin x)}$$

$$\rightarrow (۳g-f)(x) = \frac{۹-۹-\sin^۲ x-۳\sin x}{۳+\sin x} = \frac{-\sin x(۳+\sin x)}{۳+\sin x} = -\sin$$

$$(۳g-f)(x) = -\sin x \xrightarrow[\text{می شود}]{\text{حال مشتق}} (۳g-f)'(x) = -\cos x$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۵\pi}{۳}} (۳g-f')(\frac{۵\pi}{۳}) = -\cos\frac{۵\pi}{۳} \longrightarrow -۱\times -\frac{۱}{۲} = \boxed{\frac{۱}{۲}}$$

جواب

$$g'(\sqrt[۵]{۳})\, f'(g(\sqrt[۵]{۳})) \longrightarrow (fog)'(x)$$ ⑤

$$g(x) = \frac{۱}{x^۵+|x^۵|} \longrightarrow \frac{۱}{۲x^۵}$$

$$f(x) = -\frac{۱}{\sqrt{x+|x|}} \longrightarrow \frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}}$$

$$fog(x) \longrightarrow \frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲(\frac{۱}{۲x^۵})}} \Rightarrow fog(x) = -x$$

$$fog'(x) = -۱ \longrightarrow (fog')(\sqrt[۹]{۳}) = \underline{\underline{-۱}}$$

⑥

$$f(x) = \left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)^2 = \frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}$$

$$\frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1 - \sin^2 x - 2\sin x - 1}{(\sin x + 1)^2} = \frac{-4\sin x}{(\sin x + 1)^2} = x\,g(x)$$

$$g(x) = \frac{-4\sin x}{x(\sin x + 1)^2} \longrightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = \frac{-4\sin x}{x(\sin x + 1)^2}$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{x(x+1)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{رفع ابهام}} \lim_{x\to 0} \frac{-4}{(x+1)^2} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{x=0} \frac{-4}{1} = \boxed{-4}$$

---

⑦

$$y = x^2 + 1 \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(x^2 + 1)$$

$$f(x) = -x^2 - 1 \qquad f'(x) = -2x$$

$$f'(a)\,f'(-a) = -1 \longrightarrow (-2a)(2a) = -1 \longrightarrow a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{a>0} a = 1/2 \longrightarrow f(1/2) = -\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = -5/4$$

درنتیجه نقطه‌ی $A(1/2\ \ -5/4)$ ← پس مماس‌های آن به صورت $y=-5/4$ است

و فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات برابر $\frac{5}{4}$ است

$\boxed{\text{درنتیجه جواب برابر می‌شود برابر } \frac{5}{4}}$

(۸)

$$f(x) = ۲\sqrt{x}\,(۴x^۲ + ۳)$$

$$f'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{x}}(۴x^۲+۳) + (۸x) \times ۲\sqrt{x} \xrightarrow[\text{سازی می‌کنیم}]{\text{حاصل را ساده}}$$

$$\hookrightarrow \frac{۴x^۲+۳}{\sqrt{x}} + ۱۶x\sqrt{x} \longrightarrow \frac{۲۰x^۲+۳}{\sqrt{x}}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{۲\sqrt{a}\,(۴a^۲+۳)}{a} = \frac{۸a^۲+۶}{\sqrt{a}} = m$$

$$\xrightarrow{x=a} f'(a) = \frac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}} \longrightarrow f'(a) = m$$

$$\to \frac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}} = \frac{۸a^۲+۶}{\sqrt{a}} \rightsquigarrow ۱۲a^۲ = ۳ \begin{cases} \nearrow a = \frac{۱}{۲} & \text{قق} \\ \searrow a = -۱/۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\to m = \frac{(۸ \times \frac{۱}{۴}) + ۶}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}} = \sqrt{۴} \times ۸ = \boxed{۸\sqrt{۴}}$$

---

(۹)

$$x=a \to f(a) = \frac{\sqrt{a}}{-۲a^۲+a+۱} \to f'(x) = \frac{\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times (-۲x^۲+x+۱)\right) - \left(\sqrt{x} \times (-۴x+۱)\right)}{(-۲x^۲+x+۱)^۲}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{\frac{\sqrt{a}}{-۲a^۲+a+۱}}{a} = \frac{\sqrt{a}}{a(-۲a^۲+a+۱)} = \frac{۱}{\sqrt{a}\,(-۲a^۲+a+۱)}$$

$$f'(a) = \frac{\frac{-۲a^۲+a+۱}{۲\sqrt{a}} - \frac{۸a^۲+۲a}{۲\sqrt{a}}}{(-۲a^۲+a+۱)^۲} \rightsquigarrow m = f'(a) \rightsquigarrow \frac{۶a^۲-a+۱}{۲\sqrt{a}\,(-۲a^۲+a+۱)^۲} = \frac{۱}{\sqrt{a}\,(-۲a^۲+a+۱)}$$

$$\rightsquigarrow ۶a^۲ - a + ۱ = -۲a^۲ + a + ۱$$

$$\rightsquigarrow ۸a^۲ - ۲a = ۰ \rightsquigarrow \underbrace{۲a}_{۰\ \text{غ ق ق}}(\underbrace{۴a-۱}_{+۱/۴\ \text{قق}}) = ۰$$

$$f(a) = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{-۲}{۱۶} + \frac{۱}{۴} + ۱} = \boxed{\frac{۴}{۹}}$$ جواب

(۱۰)

$$(f\circ g)'(x) \longrightarrow g'(x) \times f'(g(x))$$

$$g'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲-۱}} \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}} \frac{\frac{\cancel{۲}\times\sqrt{۵}}{\cancel{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۵}{۴}-۱}} = \sqrt{۵}$$

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}} \frac{۱}{\sqrt{\frac{۵}{۴}-\frac{۴}{۴}}} = ۲$$

$$x < \frac{\sqrt{۵}}{۲} \longrightarrow x^۲ < \frac{۵}{۴} \longrightarrow x^۲-۱ < \frac{۱}{۴} \longrightarrow \sqrt{x^۲-۱} < \frac{۱}{۲}$$

$$\longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} > ۲$$

$$f(x) = \left(x \times \overset{۲}{\cancel{[۲^+]}}\right)^۳ \longrightarrow ۸x^۳$$

$$f'(x) = ۲۴x^۲ \xrightarrow{x=۲} f'(۲) = ۲۴\times۴ = ۹۶$$

$$\text{پس}\ (f\circ g)'\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right) = ۹۶\times\sqrt{۵} = ۹۶\sqrt{۵}$$

$$\frac{۹۶\sqrt{۵}}{-۴۸\sqrt{۵}} = \boxed{-۲}$$ برابر ← حال باید ببینیم $۹۶\sqrt{۵}$ چند برابر $-۴۸\sqrt{۵}$ است؟

جواب