۲۳ ذی الحجه ۱۴۳۶

حلنا محمودی ، دوازدهم تجربی (جمعه)

① ★ اگر شیب خط‌های را محاسبه کنیم همان مقدار مشتق تابع F در $x=3$ را داریم

$A(0,1)$ ، $B(3,5) \Rightarrow m=\frac{4}{3} \Rightarrow F'(3)=\frac{4}{3}$ ✓ ②

② : $(2,2),(-1,1) \Rightarrow m=\frac{1}{3}$ معادله خط‌شان

$\hookrightarrow y-1=\frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

$\sqrt{an-1}=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \Rightarrow 3\sqrt{an-1}=x+4$

$\Rightarrow 9(an-1)=x^2+8x+16 \Rightarrow x^2+(8-9a)x+25=0$

$\Delta=0 \Rightarrow (8-9a)^2-4(25)=0 \Rightarrow (8-9a)^2=100$ ②

$\Rightarrow \begin{cases} 8-9a=10 \Rightarrow a=\frac{-2}{9} \\ 8-9a=-10 \Rightarrow a=2 \end{cases}$

★ اگر $a=\frac{-2}{9}$ باشد $F(5)$ تعریف نشده است

$f(x)=\sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5)=\sqrt{9}=3$ ✓ $\Leftarrow$ کمترین مقدار ممکن برای $a=2$

۲۴ ذی الحجه ۱۴۳۹

(۳)

$$y = \frac{x^2+mx+1}{x+3}$$

$$4y - 3x = 5 \Rightarrow 4y = 3x + 5 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{3}{4}$$

* شیب خط مماس در $x=1$ برابر $\frac{3}{4}$ می‌باشد.

$$y' = \frac{(2x+m)(x+3) - 1(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{(2+m)\times 4 - (1+m+1)}{4^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(m+2) - 2 - m = 12$$

$$\Rightarrow 4m + 8 - 2 - m = 12 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

(۲)

$$y = \frac{x^2+2x+1}{x+3} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1+2+1}{1+3} = 1 \Rightarrow A(1,1)$$

این نقطه روی خط $4y - 3x = 5$ قرار دارد.

$$\Rightarrow 4 - 3 = 5 \Rightarrow 1 = 5$$

$$\Rightarrow m + n = 2 + 1 = 3$$

سوال ۱۴

$$(3g)'\left(\frac{5\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = (3g(x) - f(x))'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow (3g - f)(x) = \left(\frac{9}{3+\sin x} - \frac{11 - \sin^2 x}{4 - \sin^2 x}\right) = \frac{9}{3+\sin x} - \frac{(3-\sin x)(9 + \sin^2 x + 3\sin x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)} = -\sin x$$

$$\rightarrow (3g - f)'(x) = -\cos x \rightarrow (3g - f)'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (fog)'x$$

(۵)

$$x>0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2x^5}, \quad x>0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2x}}$$

$$\xrightarrow{fog(x)} = \frac{-1}{\sqrt[5]{2\left(\frac{1}{2x^5}\right)}} \Rightarrow (fog)(x) = -x$$

(۲)

$$(fog)'(x) = -1 \Rightarrow (fog')(\sqrt[5]{2}) = -1$$ ✓

$$f(x) = x\,g(x)+1 \rightarrow g(x) = \frac{f(x)-1}{x} \rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{hop} \frac{+f'(0)}{0} = f'(0)$$

سوال ۴

$$f(x) = \left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2 \rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{\cos x(1+\sin x) - \cos x(-1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}\right) \times \left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$\rightarrow f'(0) = 2 \times \left(\frac{2}{1}\right) \times (-1) = -4$$

۲۷ ذی الحجه ۱۴۳۹

۸) معادله خط d به صورت $y = mx$:

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2+3) = mx \Rightarrow 8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = mx \quad (1) \\ f'(x) = 20x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = m \quad (2) \end{cases}$$

$$(1),(2) \Longrightarrow 8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = (20x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}})x$$

$$8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = 20x^{\frac{5}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 12x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x}(4x^2-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

۲

* $x=0$ و $x=-\frac{1}{2}$ غ ق ق اند چون به ازای $x=0$ شیب خط m وجود نیست و $x=-\frac{1}{2}$ در دامنه نیست پس $x=\frac{1}{2}$ ق ق است.

$$(2) \Rightarrow m = 20\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 3\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 20\alpha\frac{1}{2}\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2}$$

$$= 8\sqrt{2}$$

۹) معادله خط $y=ax$ ← d

$t=\sqrt{x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{t}{-2t^4+t^2+1}$

* چون f و d در نقطه A

یاس اند شیب آنهاد.

این نقطه برابر است و عرض آنهاد A یکسانه

$$\frac{t}{-2t^4+t^2+1}=at^2 \Rightarrow -2at^5+at^3+at-1=0$$

تشکیل سری

$$\longrightarrow -10at^4+3at^2+a=0 \Rightarrow -a(10t^4-3t^2-1)=0$$

$$t^2=\frac{3+7}{20}=\frac{1}{2} \quad \text{ق ق}$$

$$t^2=\frac{3-7}{20}=\frac{-1}{5} \quad \text{ق ق غ}$$

۲

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

✓

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$ ، (۱۰)

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{-1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x \Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{-1}{2}\times 4\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\sqrt{5}$$
$$=-4\sqrt{5}$$

$$x\to\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \Rightarrow g(x)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^-}=2^+$$

$$x\to 2^+ \Rightarrow [2^+]=2 \Rightarrow f(x)=(2x)^3=8x^3 \Rightarrow f'(x)=24x^2$$

$$f'(2^+)=24\times 4$$

(۲)

* مقدار مشتق چپ تابع $f\circ g$ در $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ،

$$f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right)\right)\times g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right)=24\times 4\times(-4\sqrt{5})=8(-48\sqrt{5})$$ ✓

سوال ۱۷)

$y=x^2+1 \xrightarrow[x=x]{\text{قرینه نسبت به}} y_1=-(x^2+1)=-x^2-1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y_1'=-2x$

خط d موازی محور xها است ← نقاط A و B ← عرض یکسان ، طول قرینه دارند .

خط d ، سهمی y_1 را در نقطه A و B قطع کند

$A(\alpha,\beta)$ ، $B(-\alpha,\beta)$ $\longrightarrow$ $A\left(\frac{1}{2},\beta\right)$ ، $B\left(-\frac{1}{2},\beta\right)$

$m_{L_1}=y_1'(-\alpha)=-2(-\alpha)=2\alpha$

$m_{L_2}=y_1'(\alpha)=-2\alpha$

L_1 و L_2 عمود اند $\longrightarrow m_{L_1}\times m_{L_2}=-1 \longrightarrow -4\alpha^2=-1 \longrightarrow \alpha=\pm\frac{1}{2}$

فاصله خط از مبدا مختصات $\to |\beta|$ $\longrightarrow \beta=y_1\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}=-1.25$ $\longrightarrow$ $|\beta|=1.25$