هلنا محمودی ، دوازدهم تجربی (جمعه)

۱: ★ اگر شیب خط مماس را محاسبه کنیم همان مقدار مشتق تابع f در $x=3$ را دارد

$$A(0,1)\ ,\ B(3,5) \Rightarrow m=\frac{4}{3} \Rightarrow f'(2)=\frac{4}{3}$$

۲: معادله خط مماس $(2,2),(-1,1) \Rightarrow m=\frac{1}{3}$

$$\hookrightarrow y-1=\frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

$$\sqrt{ax-1}=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \Rightarrow 3\sqrt{ax-1}=x+4$$

$$\Rightarrow 9(ax-1)=x^2+8x+16 \Rightarrow x^2+(8-9a)x+25=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (8-9a)^2-4(25)=0 \Rightarrow (8-9a)^2=100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8-9a=10 \Rightarrow a=\frac{-2}{9} \\ 8-9a=-10 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

★ اگر $a=\frac{-2}{9}$ باشد $f(5)$ تعریف نشده است

پس به ازای $a=2$ $\Leftarrow$ $f(x)=\sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5)=\sqrt{9}=3$

ب ،

$$y = \frac{x^2+mx+1}{x+3}$$

$$4y - 3x = n \Rightarrow 4y = 3x + n \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{3}{4}$$

* شیب خط مماس در $x=1$ برابر $\frac{3}{4}$ پس،

$$y' = \frac{(2x+m)(x+3) - 1(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{(2+m)\times 4 - (1+m+1)}{4^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(m+2) - 2 - m = 12$$

$$\Rightarrow 4m + 8 - 2 - m = 12 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

$$y = \frac{x^2+2x+1}{x+3} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1+2+1}{1+3} = 1 \Rightarrow A(1,1)$$

این نقطه روی خط $4y - 3x = n$ قرار دارد.

$$\Rightarrow 4 - 3 = n \Rightarrow n = 1 \Rightarrow m + n = 2 + 1 = 3$$

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (fog)'x$$

(5

$$x>0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2x^5} \quad , \quad x>0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2x}}$$

$$\xrightarrow{(fog)(x)} = \frac{-1}{\sqrt[5]{2\left(\frac{1}{2x^5}\right)}} \Rightarrow (fog)(x) = -x$$

$$(fog)'(x) = -1 \Rightarrow \underline{(fog)'(\sqrt[5]{3}) = -1}$$

(۸) معادله خط d به صورت $y=mx$

$$\begin{cases} f(x)=2\sqrt{x}\,(4x^2+3)=mx \Rightarrow 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=mx & (1) \\ f'(x)=20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}=m & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=\left(20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}\right)x$$

$$8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=20x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 12x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x}\,(4x^2-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

* $x=0$ و $x=-\frac{1}{2}$ غ ق ق اند چون به ازای $x=0$ شیب خط m موجود نیست و $x=-\frac{1}{2}$ در دامنه نیست پس $x=\frac{1}{2}$ ق ق است.

$$(2) \Rightarrow m=20\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=20\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}$$

$$=8\sqrt{2}$$

۹) معادله خط $d \Leftarrow y = ax$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = \frac{t}{-2t^4 + t^2 + 1}$$

* چون f و d در نقطه A مماس اند شیب آنها در این نقطه برابر است و عرض آنها در A یکسانند.

$$\frac{t}{-2t^4 + t^2 + 1} = at^2 \Rightarrow -2at^5 + at^3 + at - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق بگیری}} -10at^4 + 3at^2 + a = 0 \Rightarrow -a(10t^4 - 3t^2 - 1) = 0$$

$$t^2 = \frac{3+7}{20} = \frac{1}{2} \quad \text{ق ق}$$

$$t^2 = \frac{3-7}{20} = \frac{-1}{5} \quad \text{غ ق ق}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

10

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x \Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

$$x \to \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^-} = 2^+$$

$$x \to 2^+ \Rightarrow [2^+] = 2 \Rightarrow f(x) = (2x)^3 = 8x^3 \Rightarrow f'(x) = 24x^2$$

$$f'(2^+) = 24 \times 4$$

★ مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ،

$$f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right)\right) \times g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right) = 24 \times 4 \times (-4\sqrt{5}) = 8(-48\sqrt{5})$$