Subject:
Year : Month : Day : ( ) ۶ page : ( )

پرنیان شمشیری - دوازدهم دختر A

(۲۴) کامل

(۱) ۲

$f(۳)=۵$

$شیب = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۵-۱}{۳-۰} = \frac{۴}{۳} \rightarrow f'(۳)=\frac{۴}{۳}$ ✓

(۲) ۱٫۵

$شیب خط مماس = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۲-(۱)}{۲-(-۱)} = \frac{۱}{۳} \rightarrow$ معادله خط مماس: $y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}$

$f'(x)=\frac{a}{۲\sqrt{ax-۱}}=\frac{۱}{۳} \rightarrow ۳a=۲\sqrt{ax-۱} \rightarrow \sqrt{ax-۱}=\frac{۳a}{۲}$

$\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}=\sqrt{ax-۱} \rightarrow \frac{x+۴}{۳}=\sqrt{ax-۱} \rightarrow \frac{x+۴}{۳}=\frac{۳a}{۲} \rightarrow ۲x+۸=۹a \rightarrow x=\frac{۹a-۸}{۲}$

$\rightarrow ۳a=۲\sqrt{ax-۱} \rightarrow ۹a^۲=۴(ax-۱) \rightarrow ۹a^۲=۴ax-۴ \quad \xrightarrow{x=\frac{۹a-۸}{۲}} ۹a^۲=۱۸a^۲-۱۶a-۴$

$(\frac{۹a-۸}{۲})$

$\downarrow$

$۹a^۲-۱۶a-۴=۰$

$\rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{-۱}{۴}x-۱}$

$a=\frac{۱۶\pm\sqrt{۱۶^۲-(۴)(۹)(۴)}}{۱۸}$

$I, II \rightarrow x+۴=(\frac{۳a}{۲})۳=\frac{۹a}{۲} \rightarrow x=۴٫۵a-۴$

$II \rightarrow ۴٫۵a-۴+۴=۳\sqrt{a(۴٫۵a-۴)-۱} \rightarrow ۹a^۲-۱۶a-۴=۰ \rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ a=\frac{-۲}{۹} \end{cases}$

$f(۵)=\sqrt{۲(۵)-۱}=\sqrt{۹}=۳$

(۳)

$y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳} \rightarrow y'=\frac{(۲x+m)(x+۳)-(x^۲+mx+۱)(۱)}{(x+۳)^۲} \xrightarrow{x=۱} \frac{(۲+m)(۴)-(۲+m)}{۱۶}$

$\rightarrow \frac{۳(۲+m)}{۱۶}=\frac{۳m+۶}{۱۶}=\frac{۳}{۴} \rightarrow m+۲=۴ \rightarrow m=۲$

۲

$\rightarrow y=\frac{x^۲+۲x+۱}{x+۳} \xrightarrow{x=۱} y=\frac{۱+۲+۱}{۴}=۱ \rightarrow ۴y-۳x=n \rightarrow ۴-۳=۱ \rightarrow n=۱$

$\rightarrow m+n=۱+۲=۳$ ✓

(۴) ۰٫۵

$f(x)=\frac{۲۷-\sin^۳x}{۹-\sin^۲x} \rightarrow \frac{(۳-\sin x)(۹+\sin^۲x+۳\sin x)}{(۳-\sin x)(۳+\sin x)} = \frac{\sin^۲x+۳\sin x+۹}{۳+\sin x}$

$۳g'(\frac{۵\pi}{۳})-f'(\frac{۵\pi}{۳})=(۳g(x)-f(x))'(\frac{۵\pi}{۳})$

$\rightarrow (۳g-f)(x)=\left(\frac{۹}{۳+\sin x}-\frac{۲۷-\sin^۳x}{۹-\sin^۲x}\right)=\frac{۹}{۳+\sin x}-\frac{(۳-\sin x)(۹+\sin^۲x+۳\sin x)}{(۳-\sin x)(۳+\sin x)}=-\sin x$

$\rightarrow (۳g-f)'(x)=-\cos x \rightarrow (۳g-f)'(\frac{۵\pi}{۳})=-\cos(\frac{۵\pi}{۳})=\frac{-۱}{۲}$

سوال ۵

$g'(x)\times f'(g(x)) = (f\circ g)'(x)$

$x>0 \to g(x)=\frac{1}{2x^5}$, $x>0 \to f(x)=\frac{-1}{\sqrt[5]{2x}} \xrightarrow{x>0} f\circ g(x)=\frac{-1}{\sqrt[5]{2(\frac{1}{2x^5})}}$

$\to f\circ g(x)=-x \to (f\circ g)'(x)=-1 \to (f\circ g)'(\sqrt[5]{3})=-1$

سوال ۶

$f(x)=xg(x)+1 \to g(x)=\frac{f(x)-1}{x} \to \lim_{x\to 0} g(x)=\frac{0}{0} \xrightarrow{hop} \frac{+f'(0)}{1}=f'(0)$

$f(x)=\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2 \to f'(x)=2\left(\frac{\cos x(1+\sin x)-\cos x(-1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}\right)\times\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)$

$\to f'(0)=2\times\left(\frac{2}{1}\right)\times(-1)=-4$

سوال ۷

$y=x^2+1 \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} y_1=-(x^2+1)=-x^2-1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=-2x$

خط d، سهمی y_1 را در نقطه B و A قطع کند چون خط d موازی محور xها است ← نقاط A و B ← عرض یکسان و طول قرینه دارند.

$A(\alpha,\beta)$, $B(-\alpha,\beta) \longrightarrow A(\frac{1}{2},\beta)$, $B(-\frac{1}{2},\beta)$

$mL_1=y_1'(-\alpha)=-2(-\alpha)=2\alpha$

$mL_2=y_1'(\alpha)=-2\alpha$

L_1, L_2 عمود اند $\to mL_1\times mL_2=-1 \to -2\alpha\cdot 2\alpha=-1 \to 4\alpha^2=1 \to \alpha=\pm\frac{1}{2}$

فاصله خط از مبدا مختصات $\to |\beta| \to \beta=y_1(\frac{-1}{2})=-(-\frac{1}{2})^2-1=-\frac{1}{4}-1=\frac{-5}{4}=-1/25 \to |\beta|=1/25$

سوال ۸

$f(x)=2\sqrt{x}(4x^2+3)=8x^2\sqrt{x}+6\sqrt{x} \to f'(x)=20x\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{20x^2+3}{\sqrt{x}}$

$y-2\sqrt{\alpha}(4\alpha^2+3)=\frac{20\alpha^2+3}{\sqrt{\alpha}}(x-\alpha) \xrightarrow{(0,0)} -2\sqrt{\alpha}(4\alpha^2+3)=\frac{20\alpha^2+3}{\sqrt{\alpha}}(-\alpha)$

$\to 2(4\alpha^2+3)=20\alpha^2+3 \to 12\alpha^2=3 \to \alpha^2=\frac{1}{4}$

$m=\frac{20(\frac{1}{4})+3}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=8\sqrt{2}$

سوال ۹

d خط $\to y=ax$ $\qquad A(\alpha,a\alpha)$

$f(\alpha)=\frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^2+\alpha+1}=a\alpha \to a\sqrt{\alpha}(-2\alpha^2+\alpha+1)=1 \to -2a\alpha^{\frac{5}{2}}+a\alpha^{\frac{1}{2}}+a\alpha^{\frac{3}{2}}=1$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} -5a\alpha^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}a\alpha^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a\alpha^{-\frac{1}{2}}=0 \xrightarrow[\times 2\sqrt{\alpha}]{\div a} -10\alpha^2+3\alpha+1=0 \to \begin{cases}\alpha=\frac{-1}{5}\\ \alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$

$f(\alpha)=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-2(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

سوال ۱۰

$\left(f\circ g(\frac{\sqrt{5}}{2})\right)'=g'(\frac{\sqrt{5}}{2})^-\times f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2})^-)$

$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \to g'(x)=\frac{-1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x \to g'(\frac{\sqrt{5}}{2}^-)=\frac{1}{\sqrt{(\frac{5}{4})^- -1}}=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{4})^-}}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^-}=2^+$

$f'(2^+)=((2x)^3)'=(8x^3)'=24x^2=24\times 4$

$\to g'(\frac{\sqrt{5}}{2}^-)\times f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2})^-)=-4\sqrt{5}\times 4\times 24 \longrightarrow \frac{24\times 4\times(-4\sqrt{5})}{-48\sqrt{5}}=8$