۱۶۵ مهتا محلوجی - پاسخ تشریحی تکلیف

۱- تابع f - نقطه $(3,5)$ $(0,1)$ نقطه برخورد با محور عرض‌ها

شیب خط مماس $= \dfrac{5-1}{3-0} = \dfrac{4}{3}$

$y-1 = \frac{4}{3}(x-0)$

$y = \frac{4}{3}x + 1$

$f'(3) = \frac{4}{3}$ ✓

۲

۲- $f(x) = \sqrt{ax-1}$ $(-1,1)$ $(2,2)$ $f(5) = ?$

$m = \dfrac{2-1}{2-(-1)} = \dfrac{1}{3} \longrightarrow y-1 = \frac{1}{3}(x+1)$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

$\hookrightarrow f(x) = \sqrt{2x-1}$

$f(5) = \sqrt{9} = 3$ ✓

$\sqrt{ax-1} = \dfrac{x+4}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ax - 1 = \dfrac{x^2+8x+16}{9}$

$\rightarrow 0 = x^2 + (8-9a)x + 25$ $\Delta = (8-9a)^2 - 100$

$100 = (8-9a)^2 \rightarrow \pm 10 = 8 - 9a$

$a = -\frac{2}{9}$ ✗

$a = 2$ ✓

۲

۳- $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x+3}$ نقطه‌ای به طول واحد بر نمودار، $4y - 3x = n$

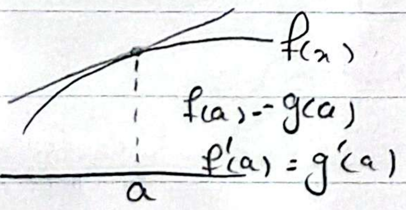
$x = 1$

$m+n = ?$ → ۳

$y(1) = 1 \rightarrow 1 = \dfrac{3+n}{4} \rightarrow n = 1$

$y = \dfrac{3x+n}{4}$

$y' = \dfrac{(2x+m)(x+3) - (1)(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$



$y'(1) = \dfrac{3m+6}{16} = \dfrac{3}{4}$

$m = 2$

$m + n = 3$ ✓

۲

مهتا مخلص - پاسخ تشریحی تکلیف

Date: Sub:

$$g(x)=\frac{3}{3+\sin x},\qquad f(x)=\frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}-4$$

$$\frac{(\cancel{3-\sin x})(9+\sin^2 x+3\sin x)}{(\cancel{3-\sin x})(3+\sin x)}$$

$$3g'\left(\frac{5\pi}{3}\right)-f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=?$$

۱٫۵

$(3g-f)(x)=-\sin x$

$$(3g-f)'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{\cancel{9}-9-\sin^2 x-3\sin x}{3+\sin x}\right)'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$\to (3g-f)'(x)=-\cos x \to (3g-f)'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$

$$\left(\frac{-\sin x(\cancel{\sin x+3})}{\cancel{\sin x+3}}\right)'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=(-\sin x)'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\frac{5\pi}{3}=1/2$$

$x>0$ $\quad g(x)=\frac{1}{x^5+|x^5|},\qquad f(x)=\frac{-1}{\sqrt[5]{x+|x|}}-5$

$x^5\neq -|x^5| \leftarrow$

$g(x)=\frac{1}{2x^5}\qquad f(x)=\frac{-1}{\sqrt[5]{2x}}$

$$\underbrace{g'(\sqrt[5]{3})\,f'(g(\sqrt[5]{3}))}_{(f\circ g)'(\sqrt[5]{3})}=-1$$

✓ ۲

$$f\circ g=\frac{-1}{\sqrt[5]{2\times\frac{1}{2x^5}}}=-x$$

ESPADANA

Scanned with CamScanner

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Date: Sub:

مهتا ملکعجمی - پاسخ تکلیف

۶ - $f(x) = \left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2$ $\quad f(x) = xg(x)+1$ $\quad \lim_{x\to 0} g(x)$

$$\downarrow$$

$$g(x) = \frac{f(x)-1}{x}$$

$$g(x) = \frac{\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2 - 1}{x} = \frac{\frac{1+\sin^2 x - 2\sin x - (1+\sin^2 x + 2\sin x)}{(1+\sin x)^2}}{x}$$

$$= \frac{-4\sin x}{x(1+\sin x)^2}$$

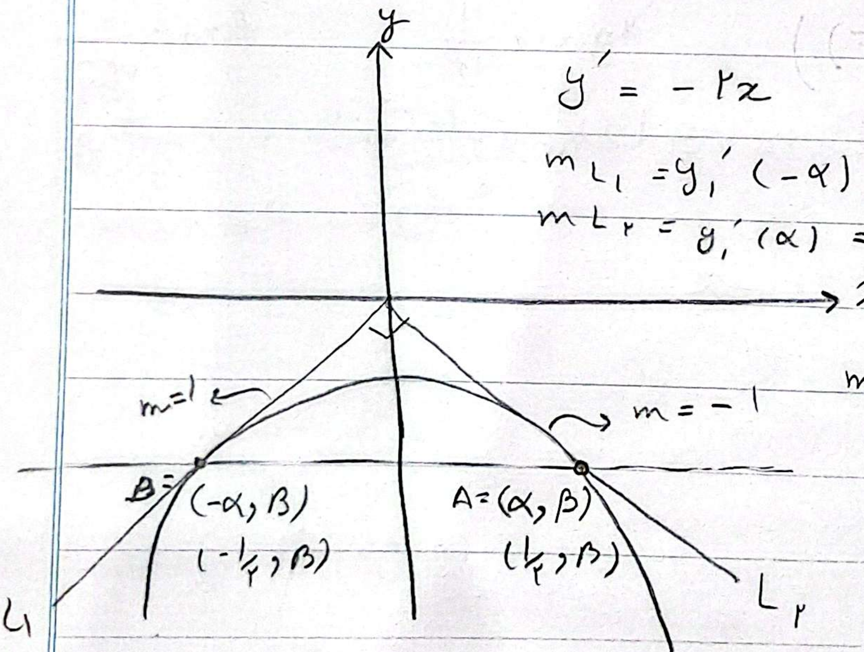
۲

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin x}{x(1+\sin x)^2} = \lim \frac{-4}{(1+\sin x)^2} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$$

$$-4 \times 1 = -4$$ ✓

۷ - خط d موازی محور xها قرینه $y = x^2+1$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع کند، مماس‌ها عمود / فاصله d از مبدأ

$$y = x^2+1 \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -x^2-1$$



$$y' = -2x$$

$$m_{L_1} = y_1'(-\alpha) = -2(-\alpha) = 2\alpha$$

$$m_{L_2} = y_1'(\alpha) = -2\alpha$$

$$m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -1$$

$$-2\alpha \cdot 2\alpha = -1$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{2}$$

۲

$$\beta = y_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4} \rightarrow |\beta| = \frac{5}{4}$$

فاصله خط از مبدأ مختصات = $|\beta|$

ESPADANA

مهتا خلیلی - پاسخ تکلیف

Date: Sub:

۸ - خط d از مبدأ مختصات $(0,0)$ می‌گذرد و بر نمودار $f(x)=2\sqrt{x}(4x^2+3)$ مماس است. شیب خط d ؟

$$f'(x) = \frac{3}{3\sqrt{x}}(4x^2+3) + \cancel{(8x)(2\sqrt{x})} = 20x\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$4x\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 16x\sqrt{x}$$

$(\alpha , d\alpha)$ محل تماس خط و تابع

$$f(\alpha) = 8\alpha^2\sqrt{\alpha} + 6\sqrt{\alpha} = d\alpha$$

$$f'(\alpha) = 20\alpha\sqrt{\alpha} + \frac{3}{\sqrt{\alpha}} = d \xrightarrow{\times\alpha} 20\alpha^2\sqrt{\alpha} + 3\sqrt{\alpha} = d\alpha$$

$$d\alpha = 20\alpha^2\sqrt{\alpha} + 3\sqrt{\alpha} = 8\alpha^2\sqrt{\alpha} + 6\sqrt{\alpha}$$

$$12\alpha^2\sqrt{\alpha} = 3\sqrt{\alpha} \longrightarrow 4\alpha^2 = 1 \longrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{2}$$ ۲

در دامنه نیست

$$f'(+\tfrac{1}{2}) = 8\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 6\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{d}{2} \rightarrow \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2}$$

$$d = 8\sqrt{2}$$ ✓

۹ - خط d از مبدأ مختصات $(0,0)$ می‌گذرد در نقطه A مماس $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}$ عرض A

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(-2x^2+x+1) - (-4x+1)(\sqrt{x})}{(-2x^2+x+1)^2}$$ ۰

خط d $\rightarrow y = ax$ $A(\alpha, a\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^2+\alpha+1} = a\alpha \rightarrow a\sqrt{\alpha}(-2\alpha^2+\alpha+1) = 1 \rightarrow -2a\alpha^{\frac{5}{2}} + a\alpha^{\frac{1}{2}} + a\alpha^{\frac{3}{2}} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} -5a\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}a\alpha^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a\alpha^{-\frac{1}{2}} = 0 \xrightarrow[\times 2\sqrt{\alpha}]{\div a} -10\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{5} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ESPADANA

Scanned with CamScanner

Date: Sub:

$$g(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad f(x) = (x[x])^2 - 10$$

مشتق تابع $f\circ g$ در $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $-48\sqrt{5}$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \to [x] \to [x] = 2 \qquad \to f(x) = (2x)^2$$ 1

$$g(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(f\circ g)' \to \left(\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}}\right)'$$

$$= \frac{0 - \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}(-2)}{x^2-1} = \frac{\frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} \xrightarrow{x=\sqrt{5}/2} \frac{\frac{2\sqrt{5}}{1/2}}{1/4} = \frac{4\sqrt{5}}{\frac{1}{4}} = 16\sqrt{5}$$

$$\frac{16\sqrt{5}}{-48\sqrt{5}} = -\frac{1}{3}$$

$$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \to g'(x) = \frac{-1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x \to g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^- - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^-} = 2^+$$

$$f'(2^+) = ((2x)^3)' = (8x^3)' = 24x^2 = 24 \times 4$$

$$\to g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right) \times f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) = -4\sqrt{5} \times 4 \times 24 \to \frac{24 \times 4 \times (-4\sqrt{5})}{-48\sqrt{5}} = 8$$