(۱۵)

$g(\sqrt[5]{3})$: $|x|=x \Rightarrow \sqrt[5]{3}>0 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{2x^5} \Rightarrow g(\sqrt[5]{2})=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$ / $g'(\sqrt[5]{3})=-\frac{5}{2(\sqrt[5]{3})^6}$

$=-\frac{5}{2.3}\,(4/5)$

نزولی $x>0$ $\Rightarrow f(x)=-(2x)^{-\frac{1}{5}} \xrightarrow{'} f'(x)=\frac{2}{5}(2x)^{-6/5} \Rightarrow x=1/4 \Rightarrow f'(\frac{1}{4})=\frac{2}{5}(\frac{1}{2})^{-6/5}=\frac{2}{5}\,3^{\frac{6}{5}}$

$\Rightarrow g'(\sqrt[5]{3})\,f'(g(\sqrt[5]{3}))=-1$ ✓

۲

---

(۱۶)

$f(x)=1+xg(x)$

$g(x)=\frac{f(x)-1}{x} \xrightarrow{}$ / مشتق f در نقطه صفر را حساب میکنیم $\Rightarrow U(x)=\frac{\sin x-1}{1+\sin x} \Rightarrow f(x)=U(x)^2 \xrightarrow{\text{پس}} f'(x)=2U(x)(U'(x))$

$\xrightarrow{x=0} \sin 0=0 \longrightarrow U'(x)=\frac{\cos x(1+\sin x)-(\sin x-1)(\cos x)}{(1+\sin x)^2} \xrightarrow{x=0} u'(0)=\frac{1.1-(-1).1}{1^2}$

$=2$

$f'(0)=2(-1)(2)=-4 \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x)=-4$ ✓

۲

---

(۱۷)

پیدا کردن نقطه برخورد $x^2+1=c \Rightarrow x=\pm\sqrt{c-1} \xrightarrow{\text{در نقطه}} A(\sqrt{c-1}, c)$ و $B(-\sqrt{c-1}, c)$

شیب مماس $y=x^2+1 \longrightarrow y'=2x \Rightarrow$ شیب $m_1=2\sqrt{c-1}$

$m_2=-2\sqrt{c-1}$

شرط عمود $\longrightarrow m_1m_2=-1 \Rightarrow (2\sqrt{c-1})(-2\sqrt{c-1})=-1 \Rightarrow c=\frac{5}{4}$

فاصله خط از مبدا $y=c$ خط افقی $\longrightarrow |c|=\frac{5}{4}$ ✓

۲

---

(۱۸)

خط از مبدا $\Rightarrow f'(a)=\frac{f(a)}{a}$ / $f'(x)=2(\frac{1}{2\sqrt{x}})(4x^2+3)+2\sqrt{x}(8x)=\frac{4x^2+3}{\sqrt{x}}+16x\sqrt{x}$

بر $x=a$

شرط مماس: $f'(a)=\frac{f(a)}{a} \longrightarrow$ شرط $2\frac{4a^2+3}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{4a^2+3}{\sqrt{a}}+16a\sqrt{a}=2\frac{4a^2+3}{\sqrt{a}} \Rightarrow 12a^2=3 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$

شیب خط $m=f'(a) \longrightarrow m=\frac{4(\frac{1}{2})^2+3}{\sqrt{\frac{1}{2}}}+16(\frac{1}{2})(\sqrt{\frac{1}{2}})=\boxed{8\sqrt{2}} \longleftarrow m$

۲

---

(۱۹)

در $x=a$ گذرد مماس $\Rightarrow f'(a)=\frac{f(a)}{a} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}(-2x^2+x+1)^{-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{-2x^2+x+1}-\sqrt{x}\frac{-4x+1}{(-2x^2+x+1)^2}$

ساده کردن

شرط مماس A : پس از ساده سازی داریم $-4a^2+2a+1=0 \longrightarrow a=1/2$ جواب

عرض نقطه $\rightarrow y_A=f(1/2)=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-2(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+1}=\frac{1/\sqrt{2}}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow y_A=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftarrow$ جواب. ✓

۲

---

(۲۰)

$g(x)$ در نقطه $\rightarrow g(\frac{\sqrt{5}}{2})=\frac{1}{\sqrt{5/4-1}}=2$ / مشتق چپ f را از ۲ $x\to 2^- \Rightarrow [x]=1$

$f(x)=x^3$

$f'(2^-)=12$ / $g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{2} \longrightarrow g'=-4\sqrt{5}$

۲

مشتق چپ و شیب؟ $\Rightarrow g(a) \xrightarrow[a=\sqrt{5}/2]{} \Rightarrow g(a)=2$ تست جزء $[g(x)] \longrightarrow g'(x)=\frac{-x}{(x^2-1)^{3/2}}<0$

$\longrightarrow$ نزولی $\rightarrow g(x)>2 \longrightarrow 2<g(x)<3 \Rightarrow [g(x)]=2$ $f(g(x))=(g(x)\cdot 2)^3=8g(x)^3$
$x\to a^-$

$g'(a)=a^2-1=\frac{1}{4} \longrightarrow =1/8 \longrightarrow$ مشتق چپ $(f(g(a)))'=96(-4\sqrt{5})=-384\sqrt{5} \Rightarrow \frac{+384\sqrt{5}}{+48\sqrt{5}}=$

$=|8|$ ✓ جواب

(نمره شما به علت ننوشتن اسم المپیاد لحاظ می‌شود) ۱۲

سوال ۱

شیب خط مماس $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$

سوال ۲

$m = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$

$f(x) = \sqrt{ax-1} \xrightarrow[\text{خط مماس}]{\text{شیب}} f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax-1}} \rightarrow \frac{a}{2\sqrt{ax-1}} = \frac{1}{3} \rightarrow 3a = 2\sqrt{ax-1} \quad (I)$

معادله خط گذرنده از ۲ نقطه $= y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow 3y = x+4 \rightarrow x+4 = 3\sqrt{ax-1} \quad (II)$

$\xrightarrow{I \text{ و } II} x+4 = (\frac{3a}{2})3 = \frac{9a}{2} \rightarrow x = 4{,}5a - 4$

$\xrightarrow{II} 4{,}5a - 4 + 4 = 3\sqrt{a(4{,}5a-4)-1} \rightarrow 9a^2 - 16a - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{-2}{9} \end{cases}$

$f(5) = \sqrt{2(5)-1} = \sqrt{9} = 3$

سوال ۳

$(1, \frac{2+m}{4}) \rightarrow y' = \frac{(2+m)4 - (2+m)}{16} = \frac{3(2+m)}{16} = \frac{3}{4} \rightarrow m = 2$

$m + n = 2 + 1 = 3$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \rightarrow \frac{3}{4} + \frac{n}{4} = \frac{2+m}{4} \rightarrow m - n = 1 \longrightarrow n = 1$

سوال ۴

$3g'(\frac{5\pi}{3}) - f'(\frac{5\pi}{3}) = (3g(x) - f(x))'(\frac{5\pi}{3})$

$\rightarrow (3g-f)(x) = \left(\frac{9}{3+\sin x} - \frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}\right) = \frac{9}{3+\sin x} - \frac{(3-\sin x)(9+\sin^2 x + 3\sin x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)} = -\sin x$

$\rightarrow (3g-f)'(x) = -\cos x \longrightarrow (3g-f)'(\frac{5\pi}{3}) = -\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{-1}{2}$