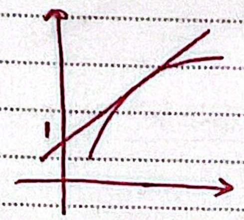
فاطمه نعمانی

۱۵

بسم الله الرحمن الرحیم

تکلیف ۲۳

۱)



$\rightarrow (3,5) \rightarrow f'(3) = ?$

شیب نمودار $(3,5)$ ← $ax+b=f$ معادله خط است

$f(3)=5 \rightarrow 3a+1=5 \rightarrow 3a=4$

$\rightarrow \boxed{a=\frac{4}{3}=f'(3)}$ ✓

۲

---

۲) $f(x)=\sqrt{ax-1} \rightarrow$ خط مماس $(-1,1)$, $(2,2)$ $\rightarrow f(5)=?$

معادله خط مماس را به دست می‌آوریم : $ax+b=y$ $\begin{cases} -a+b=1 \\ 2a+b=2 \end{cases} \rightarrow 3a=1 \rightarrow a=\frac{1}{3}$ $\quad b=\frac{4}{3}$

$\frac{2}{3}+b=\frac{4}{3}$

$\rightarrow$ خط مماس $\Rightarrow \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}=y \longrightarrow$ چون خط مماس است بر تابع، معادله‌ی تلاقی دو ریشه مضاعف دارد یعنی $\Delta=0$

$\frac{x+4}{3}=\sqrt{ax-1} \rightarrow \left(\frac{x+4}{3}\right)^2=ax-1 \rightarrow \frac{x^2+8x+16}{9}=ax-1$

$\rightarrow 9ax-9=x^2+8x+16 \rightarrow x^2+(8-9a)+25=0$

$\Delta=0$

$(8-9a)^2-4(1)(25) \Rightarrow (8-9a)^2=100 \rightarrow$

$8-9a=\pm 10 \rightarrow a \rightarrow 2 \rightarrow ✓ \rightarrow f(5)$ ✓ ممکن

$\rightarrow -\frac{2}{9} \rightarrow \times \rightarrow f(5) \times$ بوجود نیست

تعریف نشده است!

$\rightarrow a=2 \rightarrow \sqrt{2x-1} \rightarrow f(5)=\sqrt{10-1}=\sqrt{9}=\boxed{3}$ ✓

۲

---

۳) $\frac{x^2+mx+1}{x+3}$, $my-3x=n \rightarrow m+n=?$

$\frac{3x+n}{m}=y$ ← در نقطه‌ی واحد مماس است ← یعنی مقدار برابر دارند

$x=1 \rightarrow \frac{1+m+1}{4}=\frac{3+n}{m} \rightarrow 2+m=3+n \rightarrow \underline{m-n=1}$

$\swarrow f'(1)=\frac{3}{4}$ ← شیب را برابر را به دست می‌کنیم

۱۴۰۴/۱۲/۱۷

۲

$4(2+m) - (2+m)$

$f'(1) = \frac{\cancel{(2x+m)}(x+3) - (1)(x^2+mx+1)}{\cancel{(x+3)^2}} = \frac{3}{4}$

۱۶

$\frac{\cancel{3}(2+m)}{\cancel{16}_{4}} = \frac{\cancel{3}}{4} \to 2+m=4 \to \boxed{m=2}$

$m-n=1 \to \boxed{n=1} \to m+n=\boxed{3}$

(۲) $3g'(\frac{5\pi}{3}) - f'(\frac{5\pi}{3}) = ?$ $\quad g(x) = \frac{3}{3+\sin x}$ $\quad f(x) = \frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}$

↳ $(3g-f)'(\frac{5\pi}{3}) = ?$

↳ $3g - f = \frac{9}{3+\sin x} - \frac{9+3\sin x+\sin^2 x}{3+\sin x} = \frac{-\sin x(\cancel{3+\sin x})}{\cancel{3+\sin x}}$

(۲)

* $f = \frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x} = \frac{\cancel{(3-\sin x)}(9+3\sin x+\sin^2 x)}{\cancel{(3-\sin x)}(3+\sin x)} = \frac{9+3\sin x+\sin^2 x}{3+\sin x}$

$= -\sin x \xrightarrow{\text{مشتق}} = \cos x \to \cos(\frac{5\pi}{3}) = \boxed{-\frac{1}{2}}$

(۵) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x^5+|x^5|}$ $\quad \to g'(\sqrt[5]{3})\, f'(g(\sqrt[5]{3})) = ?$

$g'(\sqrt[5]{3})\, f'(g(\sqrt[5]{3})) = (f(g(\sqrt[5]{3})))'$

(۱)

$fog = -\frac{1}{\sqrt[5]{x^5+|x^5|+|x^5+|x^5||}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{4x^5}} = \frac{1}{x\sqrt[5]{4}}$

$\oplus \quad \oplus \quad \oplus$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{-\sqrt[5]{4}}{(x\sqrt[5]{4})^2} = \frac{-\cancel{\sqrt[5]{4}}}{x^2 \times \cancel{\sqrt[5]{4}} \times \sqrt[5]{4}} = \frac{-1}{\sqrt[5]{4} \times \sqrt[5]{9}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[5]{36}}}$

$g'(x) \times f'(g(x)) = (fog)'(x)$

۱۴۰۴/۱۲/۱۶ $x>0 \to g(x) = \frac{1}{2x^5}$, $a>0 \to f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2x}} \xrightarrow{x>0} fog(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2(\frac{1}{2x^5})}}$

$\to fog(x) = -x \to (fog)'(x) = -1 \to (fog)'(\sqrt[5]{3}) = -1$

۶) $f(x)=\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2$ ، $f(x)=x\,g(x)+1$ → $\lim_{x\to0} g(x)=?$

$\to g(x)=\frac{f(x)-1}{x} \to \lim_{x\to0} g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$

$x=0$ ، $1=f(0)$ می‌شود

$\lim_{x\to0} g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0) \Rightarrow$

مشتق تابع f را برای x=0 می‌خواهیم

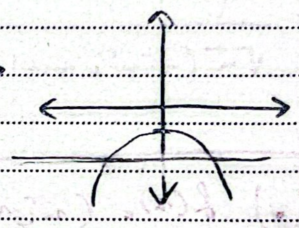
$2\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{\cos x(1+\sin x)-((\cos x)(\sin x-1))}{(1+\sin x)^2}\right)=\frac{2}{1}=2$

$2\times -1\times 2=\boxed{-4}$ ✓

(۴)

۷) $y=x^2+1$ → فاصله تا مبدأ؟

قرینه نسبت به محور x $=-x^2-1$ → x ها را فواصل مساوی کنید → $y=a$



$-x^2-1=a \to x^2=\underbrace{-1-a}_{>0}$ مساله ۲ جواب دارد پس ← ...

$(\pm\sqrt{-1-a}, a)$: مختصات نقاط

شیب‌ها: $-2\sqrt{-1-a}$, $2\sqrt{-1-a}$ ← $-2x$ = شیب مماس بر منحنی

(۲)

عمود بودن $\to -2\sqrt{-1-a}=\frac{-1}{-2\sqrt{-1-a}} \to 4(-1-a)=-1 \to$

$-1-a=\frac{-1}{4} \to -a=\frac{-5}{4} \to a=\frac{-5}{4} \to$ $\boxed{\text{فاصله از مبدأ} = \frac{5}{4}}$ ✓

۸) $f(x)=2\sqrt{x}\,(4x^2+3)$ → d ، $m_d=?$

نقطه a را در نظر می‌گیریم که در آن نقطه d بر f مماس است ←

(۱)

$m=\frac{f(a)}{a}=f'(a)$

$f(x)=2(4x^2+3)x^{\frac{1}{2}} \to f'(x)=2\left(8x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(4x^2+3)\right)$

$=16x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}(4x^2+3) \to$ ۱۴۰۴/۱۲/۱۳

$f(x)=2\sqrt{x}(4x^2+3)=8x^2\sqrt{x}+6\sqrt{x} \to f'(x)=20x\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{20x^2+3}{\sqrt{x}}$ $\quad m=\frac{20\left(\frac{1}{4}\right)+3}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=8\sqrt{4}$

$y-2\sqrt{\alpha}(4\alpha^2+3)=\frac{20\alpha^2+3}{\sqrt{\alpha}}(x-\alpha) \xrightarrow{(0,0)} -2\sqrt{\alpha}(4\alpha^2+3)=\frac{20\alpha^2+3}{\sqrt{\alpha}}(-\alpha)$

$\to 2(4\alpha^2+3)=20\alpha^2+3 \to 12\alpha^2=3 \to \alpha^2=\frac{1}{4}$

$f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^2+\alpha+1}\cdot a\alpha \to a\sqrt{\alpha}(-2\alpha^2+\alpha+1)=1 \to -2a\alpha^{\frac{5}{2}}+a\alpha^{\frac{3}{2}}+a\alpha^{\frac{1}{2}}=1$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} -5a\alpha^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}a\alpha^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a\alpha^{-\frac{1}{2}}=0 \xrightarrow[\times 2\sqrt{\alpha}]{\div a} -10\alpha^2+3\alpha+1=0 \to \begin{cases}\alpha=-\frac{1}{5}\\ \alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$

۱۲ سه شنبه
اسفند ۱۴۰۴

$f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-2(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

جواب ۸ ←

$\dfrac{2(4a^2+3)\sqrt{a}}{a}$ ← برابر با $x=a$

$\to a=\frac{1}{2} \to m=\dfrac{f(x)}{a}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=\boxed{8}$

3 Mar 2026 | ۱۳ رمضان ۱۴۴۷

---

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{-4x^2+x+1} \to A(x,y)=?$

خط $\to y=ax$ $\quad A(\alpha, a\alpha)$

مماس است پس شیب خط مماس میشه

$x=a$

$f'(a)=\dfrac{f(a)}{a}$

$\dfrac{\sqrt{x}}{-(2x+1)(x-1)} \xrightarrow{\text{مشتق}} \dfrac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(-(2x+1)(x-1)\right)-\sqrt{x}(-4x+1)}{\left(-(2x+1)(x-1)\right)^2}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}(-4x^2+x+1)}$ ← برابر با a نمیتونه باشه ← $a=\frac{1}{4}$

$4a-1=0$

$4a=1 \to a=\frac{1}{4}$

---

10) $f(x)=(x[x])^3 \quad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \to (f\circ g)' \quad x=\frac{\sqrt{5}}{2}=?$

$f\circ g=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\times 1\right)^3=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^3 \to (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$

مشتق

$\left[\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right]=2 \to f'=-\frac{3}{2}(x^2-1)^{-\frac{5}{2}}(2x)=$

$\frac{5}{4}-\frac{4}{4}=\frac{1}{4}$

$-\frac{3}{2}\times\dfrac{-1}{\sqrt{4^5}}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}\times 3}{2\times 2^5}=\dfrac{3\sqrt{5}}{64}$

2^{10}

$\dfrac{\frac{3\sqrt{5}}{64}}{-\frac{48\sqrt{5}}{16}}=\boxed{\dfrac{-1}{16\times 64}}$

۱۴۰۴/۱۲/۱۲

$(f\circ g(\frac{\sqrt{5}}{2}))'=g'(\frac{\sqrt{5}}{2})^-\times f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2})^-)$

$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \to g'(x)=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x \to g(\frac{\sqrt{5}}{2}^-)=\dfrac{1}{\sqrt{(\frac{5}{4})^- -1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}^-}}=\dfrac{1}{(\frac{1}{2})^-}=2^+$

$f'(2^+)=((2x)^3)'=(8x^3)'=24x^2=24\times 4$

$\to g'(\frac{\sqrt{5}}{2}^-)\times f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2})^-)=-4\sqrt{5}\times 4\times 24 \to \dfrac{24\times 4\times(-4\sqrt{5})}{-48\sqrt{5}}=8$