فاطمه خانی

بسم الله الرحمن الرحیم

۱) $(۳,۵) \rightarrow f'(۳) = ?$

شیب خط مماس = شیب خط قاطع $(۱,۱)$ و $(۳,۵)$

$= \frac{۵-۱}{۳-۱} = ۲$

$f'(۳) = ۵ \rightarrow ۳a+b = ۵ \rightarrow ۳a = ۴$

$\rightarrow \boxed{a = \frac{۴}{۳} = f'(۳)}$

---

۲) $f(x) = \sqrt{ax-۱}$ ~ خط $(-۱,۱)$ و $(۲,۲) \rightarrow f(۵) = ?$

معادله خط: $ax+b = y \begin{cases} -a+b = ۱ \\ ۲a+b = ۲ \end{cases} \rightarrow ۳a = ۱ \rightarrow a = \frac{۱}{۳} \quad b = \frac{۴}{۳}$

$\frac{۱}{۳}+b = \frac{۴}{۳}$

$\rightarrow$ خط $\Rightarrow \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳} = y \rightarrow$ چون خط بر تابع مماس است، معادله‌ی تلاقی این دو یک جواب مضاعف یعنی $\Delta = ۰$ دارد

$\frac{x+۴}{۳} = \sqrt{ax-۱} \rightarrow \left(\frac{x+۴}{۳}\right)^۲ = ax-۱ \rightarrow \frac{x^۲+۸x+۱۶}{۹} = ax-۱$

$\rightarrow ۹ax-۹ = x^۲+۸x+۱۶ \rightarrow x^۲+(۸-۹a)x+۲۵ = ۰$

$\Delta = ۰$

$(۸-۹a)^۲ - ۴(۱)(۲۵) \Rightarrow (۸-۹a)^۲ = ۱۰۰ \rightarrow$

$۸-۹a = ۱۰ \rightarrow$ ۶۵

$\rightarrow a = ۲ \rightarrow \sqrt{۲x-۱} \rightarrow f(۵) = \sqrt{۱۰-۱} = \sqrt{۹} = \boxed{۳}$

---

۳) $\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$ ، $۲y-۳x = n \rightarrow m+n = ?$

رو خط مجانب است $\rightarrow$ یعنی با مقدار برابر داره $\leftarrow y = \frac{۳x+n}{۲}$

$x = ۱ \rightarrow \frac{۱+m+۱}{۱} = \frac{۳+n}{۲} \rightarrow ۲+m = ۳+n \rightarrow m-n = ۱$

شیب را با مشتق برابر می‌گیریم $\rightarrow f'(۱) = \frac{۳}{۲}$

۱۴۰۴/۱۲/۱۷

$$f'(1) = \frac{(2m+m)(n+2) - (1)(n^2+mn+1)}{(n+2)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3^{(2+m)}}{3^4} = \frac{1}{3} \rightarrow 2+m = 1 \rightarrow \boxed{m=-1}$$

$$m-n=1 \rightarrow \boxed{n=-2} \rightarrow m+n = \boxed{-3}$$

---

۴) $3g'\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$ $\quad g(x) = \frac{3}{2+\sin x}$ $\quad f(x) = \frac{2-\sin^2 x}{4-\sin^2 x}$

$\hookrightarrow (3g-f)'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

$\hookrightarrow 3g - f = \frac{9}{2+\sin x} - \frac{9+3\sin x+\sin^2 x}{2+\sin x} = \frac{-\sin(2+\sin x)}{2+\sin x}$

$$f = \frac{2-\sin^2 x}{4-\sin^2 x} = \frac{(2-\sin x)(1+2\sin x+\sin^2 x)}{(2-\sin x)(2+\sin x)} = \frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{2+\sin x}$$

$$= -\sin x \xrightarrow[\text{مشتق}]{} = \cos x \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

---

۵) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{x+|x|}}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x^3+|x^3|}$ $\rightarrow g'(\sqrt[3]{2})\, f'(g(\sqrt[3]{2})) = ?$

$$-g'(\sqrt[3]{2})\, f'(g(\sqrt[3]{2})) = (f(g(\sqrt[3]{2})))' \rightarrow$$

$$fog = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+|x^3|+|x^3+|x^3|}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{2}}$$

$$\xrightarrow[\text{مشتق}]{} -\frac{\sqrt[3]{2}}{(x\sqrt[3]{2})^2} = \frac{-\sqrt[3]{2}}{x^2 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{8}}}$$

۱۴۰۴/۱۲/۱۶

۶) $f(x)=\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2$ ، $f(x)=x\,g(x)+1$ ← $\lim_{x\to 0} g(x)=$؟

$\rightarrow g(x)=\frac{f(x)-1}{x} \rightarrow \lim_{x\to 0} g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$ ←

$x=0$ ، $1=f(0)$ چون

$\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=$

$2\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{\cos x(1+\sin x)-((\cos x)(\sin x-1))}{(1+\sin x)^2}\right)=\frac{2}{1}=$

$2\times -1\times 2=\boxed{-4}$

---

۷) $y=x^2+1$ ← ضمد ← چه مدلی؟

$\rightarrow$ مشتق $=-2x-1$ ← صعودی کم x ← فعلاً ← صعودی کم x

$y=ax$ ←

$-x^2-1=a \rightarrow x^2=-1-a$ ← سمت ۲ بیشتر باشد

$\rightarrow -1-a>0$

$(\pm\sqrt{-1-a}\,,a)$: نقاط

$-2x=$ شیب ← $-2\sqrt{-1-a}\,,2\sqrt{-1-a}$ ← نقاط

عمود بر $\rightarrow -2\sqrt{-1-a}=\frac{-1}{-2\sqrt{-1-a}} \rightarrow 4(-1-a)=-1 \rightarrow$

$-1-a=\frac{-1}{4} \rightarrow -a=\frac{-5}{4} \rightarrow a=\frac{-5}{4} \rightarrow$ فاصله از مبدأ $=\boxed{\frac{5}{4}}$

---

۸) $f(x)=2\sqrt{x}\,(x^2+3)-5$ ← $x=a$؟

نقطه‌ای از نمودار f که مماس بر آن از مبدأ مختصات بگذرد ←

$m=\frac{f(a)}{a}=f'(a)$

$f(x)=2(x^2+3)x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x)=2\left(8x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x^2+3)\right)$

$=16x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}(x^2+3) \rightarrow$

۱۴۰۴/۱۲/۱۳

$\frac{2(2a^2+2)\sqrt{a}}{a}$ ← برابر با ← $2\sqrt{a}$

$a=\frac{1}{2} \rightarrow m=\frac{f'(a)}{a}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

۹) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1} \rightarrow A(x_0,y_0)=?$

$f'(a)=\frac{f(a)}{a}$ ← معادله خط مماس

$x=0$

$\frac{\sqrt{x}}{-(2x+1)(x-1)}$ مشتق $\rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(-(2x+1)(x-1))-\sqrt{x}(-4x+1)}{(-(2x+1)(x-1))^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{x}(-2x^2+x+1)}$ ← $a=\frac{1}{2}$ ← $2a-1=0$ ← $2a=1$

۱۰) $f(x)=(x[x])^2 \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow (f\circ g)'(x=\frac{\sqrt{5}}{2})=?$

$f\circ g=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\times 1\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2 \rightarrow (x^2-1)^{-\frac{2}{2}}$

مشتق $\left[\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right]^2=1 \rightarrow f'=-\frac{2}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}(2x)=$

$\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$

$-\frac{2}{2}\times\frac{-1}{2\sqrt{2a}}\times\frac{2\sqrt{2a}}{4}=\frac{\sqrt{2a}\times 2}{2\times 2^2}=\frac{2\sqrt{2a}}{8a}$

$\frac{\frac{1}{2\sqrt{2a}}}{\frac{8a}{4}}=\frac{-1}{16\times 2a}$

۱۴۰۴/۱۲/۱۲