

۲۰ مواضع

	<p>۱ نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه‌ی $(3, 5)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(3)$ را بیابید.</p> <p>$f'(3) = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$ ✓ (۲)</p>
	<p>۲ خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{x-1}$ در نقطه‌ی A از نقاط $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ را بیابید.</p> <p>$f(5) = \sqrt{2 \times 5 - 1} = 3$ ✓ (۲)</p> <p>$\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = \sqrt{x-1}$ $\frac{1}{9}x^2 + \frac{14}{9}x + \frac{16}{9} = x - 1$ $x^2 + (14-9a)x + 25 = 0$ $\Delta = 0 \Rightarrow (14-9a)^2 = 100$ $14-9a = 10 \Rightarrow a = -\frac{4}{9}$ $14-9a = -10 \Rightarrow a = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$</p>
	<p>۳ معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $4y - 3x = n$ است. مقدار n را بیابید.</p> <p>$m+n = 1+3 = 4$ ✓ (۲)</p> <p>$x=1, y = \frac{1+3+1}{4} = 1$ (نقطه‌ی مماس)</p> <p>$4y - 3x = n$</p>
	<p>۴ اگر $f(x) = \frac{27 - \sin x}{9 - \sin^2 x}$ و $g(x) = \frac{3}{3 + \sin x}$ باشد، حاصل عبارت $3g'(\frac{5\pi}{3}) - f'(\frac{5\pi}{3})$ را بیابید.</p> <p>(۲) $[3g(\frac{5\pi}{3}) - f(\frac{5\pi}{3})]' = \frac{9}{3+\sin x} - \frac{9 + \sin^2 x + 3\sin x}{3+\sin x} = \frac{-\sin x \sin x + 3}{3+\sin x} = -\sin x$ ✓ (۲)</p>
	<p>۵ اگر $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+ x }}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ مقدار $g'(g(\sqrt{3}))f'(g(\sqrt{3}))$ را بیابید.</p> <p>$[f \circ g(\sqrt{3})]' = -\frac{1}{\sqrt{x+ x }} = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ✓ (۲)</p>
	<p>۶ اگر $f(x) = \left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)^2$ و $f(x) = xg(x) + 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را بیابید.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} \rightarrow f'(0) = 2x \cdot \frac{1}{(\sin x + 1)^2} \cdot \frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x} = -\frac{1}{2}$ ✓ (۲)</p>
	<p>۷ خط موازی محور xها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟</p> <p>$y = -x^2 - 1$ $\alpha d = \frac{1}{\alpha d} \Rightarrow \alpha^2 d^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{d}$ $y = -\frac{1}{d^2} - 1 = \frac{-1 - d^2}{d^2} = -1 - \frac{1}{d^2}$ ✓ (۲)</p>
	<p>۸ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع $f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3)$ مماس است. شیب خط d را بیابید.</p> <p>$2\sqrt{x}(4x^2 + 3) = ax$ $\frac{4x^2 + 14\sqrt{x}x + 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{40x^2 + 4x}{\sqrt{x}} = a$ $4x^2 + 4x = \frac{40x^2 + 4x}{\sqrt{x}}$ $4x^2 + 4x = 40x^2 + 4x$ $12x^2 + 4x^2 - 4x = 0$ $16x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(4x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ $a = 4\sqrt{\frac{1}{4}} = 2$ ✓ (۲)</p>
	<p>۹ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-2x^2 + x + 1}$ در نقطه‌ی A مماس است. عرض نقطه‌ی A را بیابید.</p> <p>$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{4x^2 - 2x + 2}{\sqrt{x}(-2x^2 + x + 1)}$ $\frac{\sqrt{x}}{-2x^2 + x + 1} = \frac{4x^2 - 2x + 2}{\sqrt{x}(-2x^2 + x + 1)}$ $10x^2 - 2x^2 - x = 0$ $8x^2 - x = 0 \Rightarrow x(8x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$ $y = \frac{\sqrt{1/8}}{-2(1/8)^2 + 1/8 + 1} = \frac{\sqrt{2}/4}{-2/32 + 4/32 + 32/32} = \frac{\sqrt{2}/4}{34/32} = \frac{8\sqrt{2}}{34} = \frac{4\sqrt{2}}{17}$ ✓ (۲)</p>
	<p>۱۰ فرض کنید $f(x) = (x[x])^3$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$، مقدار مشتق چپ تابع $f \circ g$ در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $48\sqrt{5}$ است؟</p> <p>$f'(x) = 3x^2(x[x])^2$ $f'(g(x)) = 3(g(x))^2(g(x)[g(x)])^2$ $g'(x) = \frac{-x}{(x^2-1)^{3/2}}$ $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $= 3 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2 \cdot \frac{-x}{(x^2-1)^{3/2}}$ $= \frac{-3x}{(x^2-1)^{7/2}}$ $\left(\frac{-3x}{(x^2-1)^{7/2}}\right)_{x=\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{-3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{5}{4} - 1\right)^{7/2}} = \frac{-\frac{3\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{7/2}} = \frac{-\frac{3\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2^7}} = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot 2^7 = -48\sqrt{5}$ ✓ (۲)</p>