آزمایشی — کلاس جمعه دوازدهم دختر A — تکلیف شماره ۲۵ — ۱۰/۵

۱

$f(x)=1-\frac{a}{x}$

$[1,3]$ — نرخ متوسط: $f(1)=1-a$, $f(3)=1-\frac{a}{3}$ $\rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-a}{3}-(-1+a)}{2}=\frac{\frac{2a}{3}}{2}=\frac{a}{3}$

نرخ لحظه‌ای $\rightarrow f'(x)=\frac{a}{x^2}$ $\rightarrow \frac{a}{x^2}=\frac{a}{3}\rightarrow x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ $\rightarrow$ $x=-\sqrt{3}$ ✗ ، $x=\sqrt{3}$ ✓

۱٫۵

۲

$y=2ax^2-5x+18a \rightarrow y'=4ax-5$

$A(-1,-1)$ روی نمودار $\Rightarrow y=-x \rightarrow y'=-1$

مماس مثبت $\rightarrow 4ax^2-5x+18a=-x \rightarrow 4ax^2-4x+18a=0$

$\rightarrow \Delta=0 \rightarrow 16-4(18a)(4a)=0 \rightarrow \frac{16}{4}=4(18a)(4a)\rightarrow 36a^2=4\rightarrow a^2=\frac{1}{9}\rightarrow a=\pm\frac{1}{3}\rightarrow a=\frac{-1}{3}$

$a=\frac{1}{3}\rightarrow$ معادله تقاطع $\rightarrow x^2-6x+9=(x-3)^2=0\rightarrow$ غ‌ق‌ق ریشه مثبت

۱٫۷۵

۳

$y=x^3-12x+2 \rightarrow y'=3x^2-12=0\rightarrow 3x^2=12\rightarrow x^2=4\rightarrow x=\pm 2$

	-2		2	
y'	+	−	+	
	↗	↘	↗	
	max		min	

min $\rightarrow x=2\rightarrow 8-24+2=-14$ ✓

۲

۴

$y=x^3+ax^2-2bx-4$

$\rightarrow x=0\rightarrow y'=3x^2+2ax-2b\rightarrow -2b=0\rightarrow b=0$

$\rightarrow x=-2\rightarrow y'=3x^2+2ax-2b\rightarrow 12-4a=0\rightarrow 4a=12\rightarrow a=3$

$\rightarrow$ اکسترمم نسبی $\rightarrow x=0\rightarrow -4$

اکسترمم نسبی $\rightarrow x=-2\rightarrow -8+12-4=0$

$\rightarrow$ فاصله $=\sqrt{(0+2)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

۴

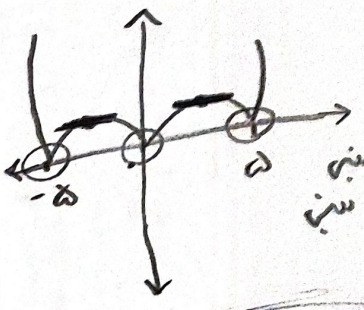
۵

$f(x)=x^2-5|x|$

$x\geq 0 \rightarrow x^2-5x \rightarrow 2x-5=0\rightarrow \frac{5}{2}$

$x<0 \rightarrow x^2+5x \rightarrow 2x+5=0\rightarrow -\frac{5}{2}$

نقاط بحرانی ۵ و



$|f(x)|\rightarrow |x^2-5|x||$

m بزرگ‌ترین max $\rightarrow m$

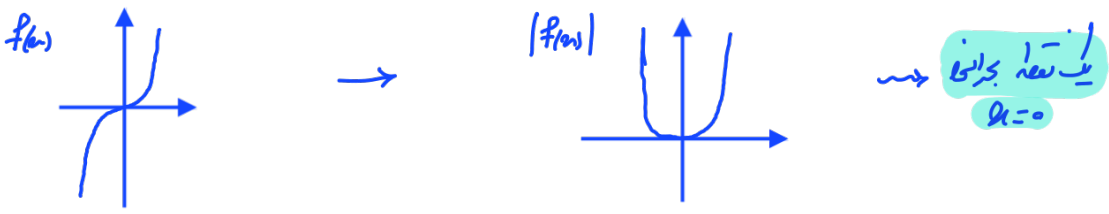
n کوچک‌ترین min $\rightarrow n$

$\rightarrow \frac{n}{m}=\frac{3}{2}=1.5$ ✓

۲

سوال ۶)

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x & x\geq 0\\ -x^2+2x & x<0\end{cases}\longrightarrow f'(x)=\begin{cases}2x+2 & x>0\\ -2x+2 & x<0\end{cases}\longrightarrow f'_+(0)=f'_-(0)=2$$



$\leadsto$ یک نقطه بحرانی $x=0$

(۷)

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,|x-a|\longrightarrow f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}|x-a|+\sqrt[3]{x^2}\times 1=\frac{2x(-x+a)}{3\sqrt[3]{x^4}}+\sqrt[3]{x^2}$$

(−)

$$\frac{-2x^2+2ax+3x^2}{3\sqrt[3]{x^4}}=0\longrightarrow\frac{x^2+2ax}{3\sqrt[3]{x^4}}=0\longrightarrow\frac{x(2a+x)}{3\sqrt[3]{x^4}}\begin{matrix}\nearrow x=0\\ \searrow x=-2a\end{matrix}$$

(۱)

$x=0\longrightarrow f(x)=0$

$x=-2a\longrightarrow \sqrt[3]{4a^2}\times 2a\longrightarrow$ max جواب $\longrightarrow \sqrt[3]{4a^2\times 2^2a^2}=\frac{3}{2}\longrightarrow 2^2\times 4a^3=\frac{27}{8}\longrightarrow a^3=\frac{1}{2^3}\longrightarrow a=\frac{1}{2}$

$x=a\longrightarrow \sqrt[3]{a^2}\times 0=0$

$x\in[0,a]\longrightarrow |x-a|=-(x-a)\longrightarrow f(x)=-\sqrt[3]{x^2}(x-a)=-x^{\frac{8}{3}}+ax^{\frac{2}{3}}$

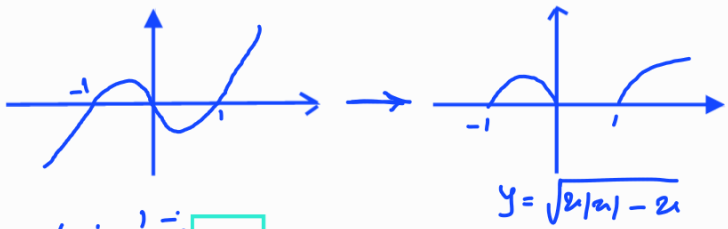
$f'(x)=-\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}}=0\longrightarrow\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(-8x+2a)=0\longrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\frac{2}{8}a\end{cases}\longrightarrow$ max ✓

$f(x_{max})=1.8\longrightarrow f(\frac{2}{8}a)=\frac{2}{2}\longrightarrow -\sqrt[3]{\frac{4}{16}a^2}\left(\frac{2}{8}a-a\right)=\frac{2}{2}\longrightarrow a\times\sqrt[3]{\frac{4}{16}a^2}=\frac{8}{2}$

به توان ۳ $\longrightarrow a^2\times\frac{4}{16}a^2=\frac{128}{8}\longrightarrow a^8=\frac{128}{8}\times\frac{16}{4}=(\frac{8}{2})^8\longrightarrow a=\frac{8}{2}=1.8$

سوال ۸

$y = |x|x - x \rightarrow \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \quad (I) \\ -x^2 - x & x < 0 \quad (II) \end{cases}$



$y = \sqrt{x|x| - x}$

(نقطه مجانبی) $K = 4$ ، (max نسبی) $M = 1$ ، (min نسبی) $m = 0$

$\frac{Km+n}{k-n} = \frac{4 \times 1 - 0}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$

سوال ۹

$f'(x) < 0 \rightarrow ad - bc < 0 \rightarrow m^2 - m - 2 < 0 \rightarrow (m-2)(m+1) < 0 \rightarrow -1 < m < 2 \;,\; m \neq 2 \rightarrow -1 < m < 2 \quad (I)$

ریشه مخرج $= x = 1 - m < 1 \rightarrow m \geq 0 \quad (II)$ $\qquad (I) \wedge (II) \rightarrow m = 0, 1$

سوال ۱۰

$D_{f(x)} = 1 - x|x| = 0 \rightarrow x|x| = 1 \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 & x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \checkmark \\ x < 0 & -x^2 = 1 \rightarrow x^2 = -1 \times \end{cases} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

مشتق تابع $\begin{cases} x > 0 \rightarrow f'(x) = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} \rightarrow x^2 = -1 \times \\ x < 0 \rightarrow f'(x) = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = -1 \checkmark \end{cases}$

$\rightarrow$ یک نقطه مجانبی