Year. Month. Date.

۱۹٫۲۵

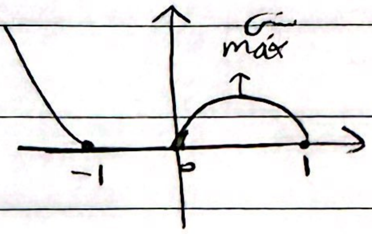
مریم تفکلی دوازدهم A صبحی تکلیف ۲۶

سوال ۱) $f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$ $\xrightarrow{x\geq 0}$ $\sqrt{x-x^2}$ → $\sqrt{x(1-x)}$

۰		۱	
−	+		−

$\xrightarrow{x\leq 0}$ $\sqrt{x+x^2}$ → $\sqrt{x(1+x)}$

۰		۱	
+	−		+



$m=1$
$n=0$
$k=4$
$\xrightarrow{\text{مجموع}} = \boxed{5}$ ۲ ✓

سوال ۲) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x}$ $[a]=?$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-1}{\sqrt{a-2x}}=0 \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a-2x}}$

$\Rightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{a-2x} \rightarrow 4x=a-2x \rightarrow 6x=a \Rightarrow x=\frac{a}{6}$ ۲

$D_f=[0,\frac{a}{2}]$ → $f(0)=\sqrt{a}$; $f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}}$ (min)

$f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}=\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{6}}$ (max)

$\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}=\sqrt{12}$ $3\sqrt{3}$

$\rightarrow \frac{3a}{\sqrt{12}}=\sqrt{12} \rightarrow 3a=12 \Rightarrow a=4$

$[a]=\boxed{4}$ ✓

سوال ۳) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|$

$D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x\geq 2 \text{ یا } x\leq -2\\ \frac{x^2(4-x^2)}{x^2-1} & -2< x< 2\end{cases}$$

ادامه حل در صفحه بعد

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(4x^3 - 8x)(x^2-1) - (2x)(x^4 - 4x^2)}{(x^2-1)^2} & x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \\ \dfrac{(8x - 4x^3)(x^2-1) - (2x)(4x^2 - x^4)}{(x^2-1)^2} & -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(x^4 - 2x^2 + 4)}{(x^2-1)^2} & x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \\ \dfrac{-2x(x^4 - 2x^2 + 4)}{(x^2-1)^2} & -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

۲

نقاط بحرانی: مشتق $= 0$

$x = 0$ ← نقطهٔ بحرانی + اعداد ± 2 چون ریشه‌های ساده قدر مطلق هستند

تعداد نقاط اکسترمم نسبی $=$ ۳ نقطه

سوال ۴)

$A(0,0)$ $B(1,1)$ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $x=0 \rightarrow c = 0$

$x = 1 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \rightarrow 3a + 2b = 0$

$A \rightarrow d = 0$; $B \rightarrow a + b + c + d = 1$

$\Rightarrow a + b = 1$ $3a + 2b = 0$

$-2a - 2b = -2$

$a = -2$, $b = 3$

$ab = -6$

۲

سوال ۵)

$f(x) = x|3 - x^2|$

در بازهٔ داده شده در صورت سوال، حاصل قدر مطلق مثبت خواهد بود!

$\rightarrow f(x) = -x^3 + 3x \longrightarrow f'(x) = -3x^2 + 3 \rightarrow 3(1 - x^2)$

۲

$\rightarrow$ ریشه‌ها $= \pm 1$

$f(-1/5) = -\frac{3}{2}\left|3 - \frac{9}{4}\right| = -\frac{9}{8}$ $f(+1) = 2$ $f(-1) = \boxed{-2}$ $f(\sqrt{3}) = 0$

مطلق min

سوال ۶

$y = x^2|x| + 3ax^2 + b \qquad \frac{b}{a} = ?$

$x=-1 \rightarrow +1 + 3a + b = 1 \rightarrow 3a+b=0$

$y' = -3x^2 + 6ax + b \xrightarrow{x=1} -3 - 6a + b = 0 \Rightarrow b - 6a = 3$ (۲)

$+ \quad 6a + 2b = 0$

$2b - 6a = 3$

$5b = 3 \rightarrow b = 0/6$

$a = -0/2$

$\frac{b}{a} = \frac{0/6}{-0/2} = -3$

سوال ۷

$y = \frac{(ax+2)}{(a+1)x + (a-1)} \qquad y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{a}{4}$

ext (min): $x_{min} = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{3}$, $y_{min} = \frac{2}{3}$ (۲)

معادله‌ی xها $= -\frac{1}{3} \rightarrow (a+1)\frac{1}{9} + (a-1) = 0 \rightarrow -\frac{a}{3} - \frac{1}{3} + a - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow a = 2$

$y = \frac{2x+2}{4x+2} \rightarrow \frac{2x+3}{4x+2} = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$ ← جواب

سوال ۸

$y = \frac{bx^2+1}{4x^2+ax+1} \qquad \frac{b}{a} = ? \qquad A(-\frac{1}{2}, 3)$

معادله‌ی xها $= -\frac{1}{2} \rightarrow 4(\frac{1}{4}) + a(-\frac{1}{2}) + 1 = 0 \rightarrow -\frac{a}{2} + 2 = 0 \rightarrow \frac{a}{2} = 2$ (۲)

$\Rightarrow a = 4$

$\frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3$

معادله‌ی افقی $= 3 \rightarrow \frac{b}{4} = 3 \rightarrow b = 12$

آپادانا

سوال ۹) ۱/۷۵

$f(x) = \frac{x^4}{x^3-8} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$f'(x) = \frac{4x^3(x^3-8) - (x^4)(3x^2)}{(x^3-8)^2} = \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3-8)^2}$

$\rightarrow x^6 - 32x^3 = 0 \rightarrow x^3(x^3-32) = 0$ → $x = 0$ ، $x = \sqrt[3]{32} \rightarrow 2\sqrt[3]{4}$

		0		2		$2\sqrt[3]{4}$	
y'	+		−	▨	−		+
y	↗		↘	▨	↘		↗

طول بازه $min = 2(\sqrt[3]{4} - 1)$

بزرگترین بازه نزولی اکید

→ طول $= \boxed{2}$

سوال ۱۰) ۱/۵

$f(x) = \frac{x^4-3}{x^2-3} \quad x \in (-2, 2)$

$\rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$

$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-3) - (x^4-3)(2x)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x^5 - 12x^3 + 6x}{(x^2-3)^2}$

$2x^5 - 12x^3 + 6x = 0 \rightarrow 2x(x^4 - 6x^2 + 3) = 0$ → $x = 0$

$x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2}$ → $x^2 = 3 + \sqrt{6} \rightarrow x = \sqrt{3+\sqrt{6}} \rightarrow$ غ ق ق
$x^2 = 3 - \sqrt{6} \rightarrow x = \sqrt{3-\sqrt{6}} \rightarrow$ ق ق

		−2		$-\sqrt{\;}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		2	
y'	▨		−	▨	−		+		−	▨	−	▨
y	▨		↘	▨	↘		↗		↘	▨	↘	▨

→ ۴ بازه اکیداً نزولی

$x^4 - 6x^2 + 3 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 6t + 3 = 0 \rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \rightarrow$
$x = \pm\sqrt{3-\sqrt{6}}$
$x = \pm\sqrt{3+\sqrt{6}}$ غ ق ق

آپادانا

x	$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		$\sqrt{3}$	
y' −	ت ن	−	0	+	0	−	0	+	ت ن	+

→ در ۳ بازه اکیداً نزولی