Year: Month: Date: ( ) Subject: فاطمه سلطان الکتابی

۱۵٫۷۵

---

(۲)

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow D_f = [0, \frac{a}{2}]$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a-2x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a-2x}} \Rightarrow 4x = a-2x \Rightarrow x = \frac{a}{6}$

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{a} \\ f(\frac{a}{6}) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{4a}{6}} = 3\sqrt{\frac{a}{6}} \\ f(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{a}{2}} \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{min} = \sqrt{\frac{a}{2}} \\ y_{max} = 3\sqrt{\frac{a}{6}} \end{array}\right\} \times = \sqrt{12}$$

$\Rightarrow \frac{3a}{\sqrt{12}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 4$

$\Rightarrow [a] = 4$

۲

---

(۳)

$g(x) = \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} = \frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$

$g'(x) = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - 2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x((2x^2-4)(x^2-1) - x^4 + 4x^2)}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 4)}{(x^2-1)^2}$

$f(x) = \begin{cases} g(x) \to |x| \geq 2 \\ -g(x) \to |x| < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) \to |x| > 2 \\ -g'(x) \to |x| < 2 \end{cases}$

$\Leftarrow$ f' در ۳ نقطه $x=2$ / $x=-2$ / $x=0$ تعریف نیست $\Leftarrow$ اکسترممی!

۲

---

(۴)

$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ و $f(1) = a+b+c = 1$

$f'(0) = f'(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = c = 0 \\ f'(1) = 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$

$a = -2$

$b = 3$

$\Rightarrow a \times b = -6$

۲

۵

$۳ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} & ✓ \\ x = -\sqrt{۳} & ✗ \end{cases}$

$f(x) = x(۳ - x^۲) = ۳x - x^۳ \xrightarrow{f'=۰} f'(x) = ۳ - ۳x^۲ = ۰$
$\Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$

$f(-۱,۵) = -۱,۵ \, |۳ - ۲,۲۵| = \frac{-۹}{۸}$

$f(-۱) = -۱ \times |۳ - ۱| = -۲ \longrightarrow$ min مطلق

$f(۱) = |۳ - ۱| = ۲$

$f(\sqrt{۳}) = \sqrt{۳} \times |۳ - ۳| = ۰$

۲

۶

$x = -۱ \longrightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x^۳ + ۳ax^۲ + b$

$A(-۱,۱)$

اکسترمم $\Rightarrow f(-۱) = ۱ \, , \, f'(-۱) = ۰$

$\Rightarrow ۱ + ۳a + b = ۱ \Rightarrow b = -۳a \longrightarrow b = \frac{۳}{۲}$

$y' = -۳x^۲ + ۶ax \xrightarrow{x=-۱} -۳ - ۶a = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۲}$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = \frac{۳ \times ۲}{-۲ \times ۱} = -۳$

۲

۷

$f' = \frac{۴x^۳(x^۳ - ۸) - ۳x^۲(x^۴)}{(x^۳ - ۸)^۲} = \frac{۴x^۶ - ۳۲x^۳ - ۳x^۶}{(x^۳ - ۸)^۲}$

$= \frac{x^۶ - ۳۲x^۳}{(x^۳ - ۸)^۲} \xrightarrow{f'=۰} x^۶ - ۳۲x^۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \sqrt[۳]{۳۲} = ۲\sqrt[۳]{۴} \end{cases}$

۱,۷۵

x		۰		۲		$۲\sqrt[۳]{۴}$	
f'	+	۰	−	‖	−	۰	+
f	↗		↘	‖	↘		↗

ماکسیمم

نقاط بحرانی $(۰,۲)$ و $(۲,۲\sqrt[۳]{۴})$ اکیداً نزولی است
⇐ مینیمم طول بازه (۰)

$(۰,۲) \rightarrow$ طول بازه $= ۲$

$(۲, \sqrt[۳]{۳۲}) \rightarrow$ طول بازه $= ۲(\sqrt[۳]{۴} - ۱) < ۲ \longrightarrow$ min طول بازه $= ۲(\sqrt[۳]{۴} - ۱)$

سوال ۸

$۴(-\frac{۱}{۲})^۲ + a(-\frac{۱}{۲}) + ۱ = ۰ \longrightarrow \frac{۱}{۲}a = ۲ \longrightarrow a = ۴$

$\frac{b}{a} = \frac{۱۲}{۴} = ۳$

مجانب افقی $\rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{bx^۲ + ۷}{۴x^۲ + ax + ۷} \longrightarrow \frac{b}{۴} = ۳ \longrightarrow b = ۱۲$

Year: Month: Date: ( ) Subject:

(10)

$D_f = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$

$$f'(x) = \frac{(4x^3)(x^2-3)-(2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{4x^5-8x^3-2x^5+6x}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{2x^5-8x^3+6x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x(x^4-4x^2+3)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x(x^2-1)}{(x^2-3)}$$

$2x=0 \Rightarrow x=0$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

۳ نمره

۲

x	-2		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2
$f'(x)$		$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

(11)

مجانب قائم $\rightarrow (a+1)x+(a-1)=0 \Rightarrow (a+1)x = -(a-1) \Rightarrow x = \frac{-(a-1)}{a+1}$

مجانب افقی $\rightarrow y = \frac{a}{a+1}$ ، طول نقطه min : $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2\times\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$

۲

$-\frac{1}{3} = \frac{-(a-1)}{a+1} \Rightarrow a+1 = 3a-3 \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow a=2 \longrightarrow y = \frac{2x+3}{3x+1}$

تقاطع با محور طول ها $\rightarrow y=0 \rightarrow$ صورت $=0 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

سوال ۱۱

$x(1-|x|) \geq 0 \longrightarrow$

		-1		0		1	
	$+$		$-$		$+$		$-$

$\rightarrow D_f = (-\infty,-1] \cup [0,1]$

$f'(x) = \frac{1-2|x|}{2\sqrt{x(1-|x|)}} \longrightarrow 1-2|x|=0 \longrightarrow x = \begin{cases} \frac{1}{2} \ ✓ \\ -\frac{1}{2} \ ✗ \end{cases}$

x		$\frac{1}{2}$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$

$\longrightarrow n=0, \ m=1$

نقاط صفر و ± 1 ← بحرانی ← $K=3$

$m+n+K=$ ۵