(۱)

$y=\sqrt{x(1-|x|)}$

$x\geq 0 \rightarrow \sqrt{x(1-x)}=\sqrt{x-x^2} \rightarrow x-x^2\geq 0$ (۰ ، ۱)

$x\leq 0 \rightarrow \sqrt{x(1+x)}=\sqrt{x+x^2} \rightarrow x+x^2\geq 0$ (−۱ ، ۰)

$\rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

$x\geq 0 \rightarrow f(x)=\sqrt{x-x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ ✓

$x\leq 0 \rightarrow f(x)=\sqrt{x+x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$ ✗

(۲)

x	$\frac{1}{2}$	-1	0	1
y	$\frac{1}{2}$	0	0	0

$\rightarrow \min=0$ ، $\max=\frac{1}{2}$ → $m=1$ $n=0$

نقاط بحرانی: $\frac{1}{2}$ ، -1 ، 1 ، 0 → (۴)

$\rightarrow m+n+k=0+1+4=5$ (۵)

(۳)

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x}$ $\quad D_f=\begin{cases}x\geq 0\\ a-2x\geq 0\rightarrow 2x\leq a\rightarrow x\leq \frac{a}{2}\end{cases} \rightarrow D_f=[0,\frac{a}{2}]$

$\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-2}{2\sqrt{a-2x}}=0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{a-2x}} \rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x} \rightarrow a-2x=4x \rightarrow 6x=a \rightarrow x=\frac{a}{6}$

(۲)

$f(0)=\sqrt{a}$

$f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}=\min$

$f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a-\frac{a}{2}}=\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{2a}{2}}=\sqrt{\frac{a}{2}}(1+2)=\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}=\max$

$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{12}\\ \rightarrow \frac{\sqrt{2}a}{2}=\sqrt{12}\\ \rightarrow a=4\end{cases}$

$\rightarrow [a]=[4]=4$

(۴)

$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|=\pm\frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}=\pm\frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$

$\rightarrow f'(x)=\pm\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(x^4-4x^2)2x}{(x^2-1)^2}=0 \rightarrow \pm(2x^5-6x^3+8x)=0$

$\rightarrow \pm 2x(x^4-3x^2+4)=0 \rightarrow \begin{cases}\pm 2x=0\rightarrow x=0\\ x^4-3x^2+4=0\rightarrow \text{ریشه } x\end{cases}$

ریشه‌های داخل قدرمطلق ← ± 2 ← ext ← سه ← تعداد نقاط اکستریم = ۳

s.a.m

Scanned with CamScanner

۴)

$f(0)=0 \rightarrow 0+0+0+d=0 \rightarrow \boxed{d=0}$

$f(1)=1 \rightarrow a+b+c+0=1 \rightarrow a+b+c=1$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \rightarrow f'(0)=0 \rightarrow \boxed{c=0} \quad f'(1)=0 \rightarrow 3a+2b=0$

$\rightarrow a+b=1 \;,\; 3a+2b=0 \rightarrow \begin{array}{r} -2a-2b=-2 \\ 3a+2b=0 \\ \hline \boxed{a=-2} \end{array} \;,\; \boxed{b=3} \rightarrow \boxed{ab=-6}$ ✓

۵) x در بازه $[-1, \sqrt{3}]$ مقدار تقریبی ماکزیمم مطلق ① است

$\rightarrow f(x)=x(3-x^2)=3x-x^3$

$f(-\frac{3}{2})=\frac{-9}{2}-\frac{-27}{8}=\frac{-18}{8}+\frac{27}{8}=\frac{9}{8}$

$f(\sqrt{3})=0$

$f'(x)=3-3x^2=0 \rightarrow 3x^2=3 \rightarrow x=\pm 1$

$x=1 \rightarrow f(1)=2$

$x=-1 \rightarrow f(-1)=-2$

$\rightarrow \boxed{\min_{\text{مطلق}}=-2}$ ✓

۶)

$f(x)=x^2|x|+3ax^2+b \rightarrow f(-1)=1+3a+b=1 \rightarrow 3a+b=0$

$f'(x)=-3x^2+6ax \rightarrow f'(-1)=-3-6a=0 \rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{2}}$

$\boxed{b=\frac{3}{2}}$

$\rightarrow \frac{b}{a}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\boxed{-3}$

۷)

$\text{طول نقطه مینیمم} = \frac{-d}{c}=\frac{1-a}{a+1}=\frac{-1}{3} \rightarrow 3-3a=-a-1 \rightarrow 2a=4 \rightarrow a=2$

$x_{\min}=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(\frac{3}{2})}=\frac{-1}{3}$

$\rightarrow y=\frac{2x+3}{2x+1} \xrightarrow{y=0} 2x+3=0 \rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{2}}$

۸)

$y=\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$

$\text{مجانب افقی} = \frac{b}{4} \rightarrow \frac{b}{4}=3 \rightarrow \boxed{b=12}$

$\text{مجانب عمودی} = \text{ریشه مخرج} = 4x^2+ax+1 \xrightarrow{x=\frac{-1}{2}} 1-\frac{a}{2}+1=0 \rightarrow \boxed{a=4}$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a}=\frac{12}{4}=\boxed{3} \end{array} \right.$

s.a.m

Scanned with CamScanner

سوال ۹

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^3-8} \rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(2x^3)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}<0$$

$$\xrightarrow{x\neq 2} x^6-32x^3<0 \rightarrow x^3(x^3-32)<0 \longrightarrow 0<x<\sqrt[3]{32},\ x\neq 2$$

$(0,2) \rightarrow$ طول بازه $= 2$

$(2,\sqrt[3]{32}) \rightarrow$ طول بازه $= 2(\sqrt[3]{4}-1)<2 \longrightarrow$ $\text{طول بازه}_{\min} = 2(\sqrt[3]{4}-1)$

تابع در دو بازه‌ی $(0,2)$ و $(2,\sqrt[3]{32})$ اکیداً نزولی

سوال ۱۰

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^2-4)-2x(2x^4-32)}{(x^2-4)^2}=\frac{2x\left((2x^4-8x^2)-(x^4-32)\right)}{(x^2-4)^2}$$

$$2x^5-14x^3+8x=0 \rightarrow 2x(x^4-8x^2+16)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \end{cases}$$

$$\longrightarrow x^4-8x^2+16=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-8t+16=0 \rightarrow t=\frac{8\pm\sqrt{32}}{2}=4\pm\sqrt{8} \rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{4-\sqrt{8}} \\ x=\pm\sqrt{4+\sqrt{8}} \end{cases}$$ و

x	$-\sqrt{4}$	$-\sqrt{4-\sqrt{8}}$	0	$\sqrt{4-\sqrt{8}}$	$\sqrt{4}$
y'	$-$ ∄ $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	∄ $+$

$\longrightarrow$ در ۳ بازه اکیداً نزولی