تکلیف ۳۲ : 17 — به نام خدا — یکتا دهقانی / دوازدهم دختر A

تعیین علامت $\Rightarrow x^2+x>0$ و $-x^2+x>0$

① ← نقاط بحرانی: ① مشتق در آن نقطه صفر باشد ② مشتق پذیر نباشد.

$$f(x)=\begin{cases} 0\le x\le 1: & \sqrt{x-x^2} \\ x\le -1: & \sqrt{x+x^2}\end{cases} \Longrightarrow f'(x)\begin{cases} 0<x<1: & \dfrac{-2x+1}{2\sqrt{x-x^2}} \\ x<-1: & \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x+x^2}}\end{cases}$$

1,5

$$f'(x)=\frac{1-2|x|}{2\sqrt{x(1-|x|)}} \xrightarrow{x\neq 0} 1-2|x|=0 \rightarrow x=\begin{cases}\frac{1}{2} ✓\\ -\frac{1}{2} ✗\end{cases}$$

I $f'(x)=0 \rightarrow \dfrac{-2x+1}{2\sqrt{x-x^2}}=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}\ \text{قق}}$ و $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x+x^2}}=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$ غ‌ق‌ق

II $f'(x)=$ تن $\longrightarrow$ مخرج $=0 \rightarrow 2\sqrt{x+x^2}=0 \rightarrow 2\sqrt{x(x+1)}=0 \rightarrow x=-1,\ x=0$

$\rightarrow 2\sqrt{x-x^2}=0 \rightarrow 2\sqrt{x(x-1)}=0 \rightarrow x=1,\ x=0$

$x=\frac{1}{2} \rightarrow f(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \rightarrow max$

$x=-1 \rightarrow f(-1)=\sqrt{-1+1}=0 \rightarrow min$

$x=0 \rightarrow f(0)=\sqrt{0-0}=0 \rightarrow min$

$x=1 \rightarrow f(1)=\sqrt{1-1}=0 \rightarrow min$

$\rightarrow m=1$ و $n=3$

$k=4$

$k+m+n=$

$3+4+1=8$

Senobar

x		$\frac{1}{2}$	
y'	$+$		$-$
y	↗	max	↘

$\rightarrow n=0$, $m=1$

$m+n+k=5$

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x} \rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ a-2x\geq 0 \end{cases} \rightarrow x\leq \frac{a}{2} \xrightarrow{\cap} 0\leq x\leq \frac{a}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-2}{2\sqrt{a-2x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a-2x}} \xrightarrow{y'=0} \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a-2x}}=0 \rightarrow x=\frac{a}{6}$

$\begin{cases} x=0 \rightarrow y=f(0)=\sqrt{a} \\ x=\frac{a}{2} \rightarrow y=f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}} \rightarrow min \\ x=\frac{a}{6} \rightarrow y=f(\frac{a}{6})=3\sqrt{\frac{a}{6}} \rightarrow max \end{cases}$

SUBJECT

Page : (   ) Year: Month: Day:

۲) نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق ناپذیر باشد.

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-2}{2\sqrt{a-2x}}$

1

$f'(x)=$ ت ن $\rightarrow$ مخرج $=0 \rightarrow \boxed{x=0}$ و $a-2x=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{a}{2}}$

$f'(x)=0 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a-2x}} \rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x} \rightarrow a-2x=4x \rightarrow \boxed{x=\frac{a}{6}}$

$\begin{cases} x=0 \rightarrow f(x)=\sqrt{a} \\ x=\frac{a}{2} \rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{a}{2}} \rightarrow min \\ x=\frac{a}{6} \rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}} \rightarrow max \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=12$

$min \times max=\sqrt{12} \rightarrow 3\sqrt{\frac{a^2}{12}}=\sqrt{12} \xrightarrow{a>0} \frac{3a}{\sqrt{12}}=\sqrt{12}$

$3a=12 \rightarrow a=4 \rightarrow [a]=4$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{12}}+\sqrt{\frac{a^2}{3}}=12 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{3}+2\sqrt{\frac{a^4}{36}}=\frac{5a^2}{12}+\frac{2a^2}{6}=\frac{9a^2}{12}$

$\frac{9a^2}{12}=144 \rightarrow \frac{3a^2}{4}=144 \rightarrow a^2=64\times 3 \rightarrow a=\pm 8\sqrt{3}$

$[a]=[8\sqrt{3}]=[8\times 1/7] \simeq [13/6]=13 \rightarrow$ د

---

۳) نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق ناپذیر باشد

$f(x) \Rightarrow \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \Big|_{-2} \frac{x^2(4-x^2)}{x^2-1} \Big|_{2} \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \rightarrow \frac{x^4-4x^2}{x^2-1} \Big| \frac{4x^2-x^4}{x^2-1} \Big| \frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$

$f'(x) \Rightarrow \begin{cases} x\geq 2 \text{ یا } x\leq -2 \Rightarrow \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2} \\ -2<x<2 \Rightarrow \frac{(8x-4x^3)(x^2-1)-(2x)(4x^2-x^4)}{(x^2-1)^2} \end{cases}$

1,5

$f'(x)=$ ت ن $\rightarrow$ مخرج $=0 \rightarrow (x^2-1)^2=0 \rightarrow ((x-1)(x+1))^2=0$

$\rightarrow x=1$ و $x=-1$ ✗   ریشه‌های داخل تعریف نیستند ← ± 2 ← ext ← تعداد نقاط اکسترمم $=3$

$f'(x)=0 \rightarrow 4x^5-4x^3-8x^3+8x=2x^5-8x^3$

$\rightarrow 2x^5-4x^3+8x=0 \rightarrow 2x(x^4-2x^2+4)=0 \xrightarrow{\Delta<0} x=0$

نقاط ۲− و ۲ و ۰ هم زاویه دارند ← پس ۵ نقطه

ج؟

$\rightarrow f'(x)=\pm\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(x^4-4x^2)2x}{(x^2-1)^2}=0 \rightarrow \pm(2x^5-4x^3+8x)=0$

$\rightarrow \pm 2x(x^4-2x^2+4)=0 \rightarrow \begin{cases} \pm 2x=0 \rightarrow x=0 \\ x^4-2x^2+4=0 \rightarrow \text{✗ ریشه} \end{cases}$

Senobar

SUBJECT:

Year: Month: Day: Page: ( )

④ نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق پذیر نباشد

از آنجایی که این مشتق یک تابع درجه ۲ است پس $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

تمامی نقطه ها مشتق پذیر است ← پس نقاط بحرانی حالت ۱ (مشتق = ۰) را امتحان کنیم

$f'(x)=0 \to x=0 \to \boxed{c=0}$

$\quad \to x=1 \to 3a+2b+\cancel{c}=0 \to 3a=-2b \to \boxed{a=-\frac{2}{3}b}$

$f(x) \to x=0 \to \boxed{d=0}$

$\quad \to x=1 \to a+b+\cancel{c}=1 \to a+b=1 \to \frac{1}{3}b=1$

$\to \boxed{b=3} \;,\; \boxed{a=-2} \to a \times b = -2 \times 3 = -6 \to$ ۲

---

⑤ نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق پذیر نباشد.

$f(x) \Rightarrow \quad x^3-4x \;\Big|_{-\sqrt{4}}\; 4x-x^3 \;\Big|_{+\sqrt{4}}\; x^3-4x$

$f'(x) \Rightarrow \quad 3x^2-4 \;\Big|_{-\sqrt{4}}\; 4-3x^2 \;\Big|_{\sqrt{4}}\; 3x^2-4 \;\to \begin{cases} x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \to 3x^2-4 \\ -2<x<2 \to 4-3x^2 \end{cases}$

$f'(x)=0 \to 3x^2-4=0 \to x=\pm 1$ غ ق ق

$f'(x)=0 \to 4-4x^2=0 \to \boxed{x=\pm 1 \text{ ق ق}}$

$f'(x) \to$ مشتق ندارد $\to \boxed{x=\pm\sqrt{4}} \to$ چون نقطه زاویه‌ای گوشه

$x=\sqrt{4} \to y=\sqrt{4}\times 0=0$

$x=-\sqrt{4} \to y=-\sqrt{4}\times 0=0$

$x=1 \to y=1\times 2=2 \to max$

$x=-1 \to y=-1\times 2=-2 \to min \to \boxed{y=-2} \to$ ۲

Senobar

Page : ( )

SUBJECT: Year: Month: Day:

۶) ۱,۷۵

$$f(x) \Rightarrow \begin{cases} x>0 \rightarrow x^3+3ax^2+b \\ x<0 \rightarrow -x^3+3ax^2+b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} x>0 \rightarrow 3x^2+6ax \\ x<0 \rightarrow -3x^2+6ax \end{cases}$$

نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق ناپذیر ← $x=0$ در این مشتق پذیر است!

$f'(x)=0 \xrightarrow{x>0} 3x^2+6ax=0 \rightarrow x(3x+6a)=0 \rightarrow x=0$ یا $x=-2a$

$\xrightarrow{x<0} -3x^2+6ax=0 \rightarrow x(-3x+6a)=0 \rightarrow x=0$ یا $x=2a$

$x<0,\ x=-1 \rightarrow 2a=-1 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$

$\Rightarrow x=-1 \Rightarrow 1+3a+b=1 \rightarrow -\frac{3}{2}+b=0 \rightarrow a=\frac{3}{2} \rightarrow$ ۲

---

۷) نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق پذیر نباشد.

$f(x) = \frac{3}{2}x^2+x+\frac{a}{6} \rightarrow f'(x)=3x+1 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}}$

$g(x) = \frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)} \rightarrow$ مجانب افقی $\Rightarrow \frac{a}{a+1}=y$ و مجانب قائم $\Rightarrow \frac{1-a}{a+1}=x$

$\Rightarrow$ نقطه برخورد $= \left(\frac{1-a}{a+1}, \frac{a}{a+1}\right)$ ۲

$f(-\frac{1}{3}) = \frac{3}{2}\times\frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{a}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$\Rightarrow \frac{1-a}{a+1} = -\frac{1}{3} \rightarrow -a-1 = 3-3a \rightarrow 2a=4 \rightarrow a=2$ ✓

$g(x) = \frac{2x+3}{3x+1} \xrightarrow{y=0} \frac{2x+3}{3x+1}=0 \rightarrow x=-\frac{3}{2} \rightarrow$ ۴

---

۸) $y = \frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1} \xrightarrow{(-\frac{1}{2}, 3)} x=-\frac{1}{2},\ y=3$

$\frac{b}{4}=y \rightarrow \frac{b}{4}=3 \rightarrow b=12$

$4\times(\frac{1}{4}) - \frac{a}{2}+1=0 \rightarrow \frac{a}{2}=2 \rightarrow a=4$

$\rightarrow \frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3 \rightarrow$ ۴ ✓

۲

Senobar

۹

$$y' = \frac{(4x^3)(x^3-8) - (3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2} = \frac{4x^6 - 32x^3 - 3x^6}{(x^3-8)^2}$$

$$= \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3-8)^2} = \frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2} \rightarrow$$

x		0		2		$\sqrt[3]{32}$	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↗		↘		↘		↗
	صعودی	max	نزولی		نزولی	min	صعودی

$(0, 2) \rightarrow$ طول بازه $= 2$

$(2, \sqrt[3]{32}) \rightarrow$ طول بازه $= 2(\sqrt[3]{4} - 1) < 2 \rightarrow$ $\underset{\text{طول بازه}}{\min} = 2(\sqrt[3]{4} - 1)$

چون در بازه $(2, \sqrt[3]{32}]$ یا $[0, 2)$ نزولی اکیداست پس min طول $= \sqrt[3]{32}$

$\rightarrow 2.$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{32} \rightarrow \frac{32\sqrt[3]{32}}{24} = y = \frac{8\sqrt[3]{4}}{3}$

۱٫۷۵

۱۰

$$y' \rightarrow \frac{(4x^3)(x^2-3) - (2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{4x^5 - 12x^3 - 2x^5 + 6x}{(x^2-3)^2}$$

۱٫۵

$$= \frac{2x^5 - 12x^3 + 6x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x(x^4 - 6x^2 + 3)}{(x^2-3)^2} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} (x = 0) \text{ و } (x = \pm\sqrt{3})$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{+6 \pm \sqrt{24}}{2}}$$

x		$-\sqrt{3+\sqrt{6}}$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		$\sqrt{3}$		$+\sqrt{3+\sqrt{6}}$	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↘		↗		↗		↘		↗		↘		↘		↗
	نزولی		صعودی		صعودی		نزولی		صعودی		نزولی		نزولی		صعودی

۴ بازه ←

$2x^5 - 12x^3 + 6x = 0 \rightarrow 2x(x^4 - 6x^2 + 3) = 0 \rightarrow \{x = 0$

$\rightarrow x^4 - 6x^2 + 3 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 6t + 3 = 0 \rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3-\sqrt{6}} \\ x = \pm\sqrt{3+\sqrt{6}} \end{cases}$ غ‌ق‌ق

x		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		$\sqrt{3}$	
y'	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$

$\rightarrow$ در ۳ بازه اکیداً نزولی