تکلیف ۲۶ : به نام خدا یکتا دهقانی / دوازدهم دختر A

تعیین علامت $\Rightarrow x^2+x>0$ و $-x^2+x>0$

x		-1		0	
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$

x		0		1	
$-x^2+x$	$-$	0	$+$	0	$-$

① نقاط بحرانی: ① مشتق در آن نقطه صفر باشد ② مشتق ناپذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} 0<x<1: & \sqrt{x-x^2} \\ x\leq -1: & \sqrt{x+x^2} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)\begin{cases} 0<x<1: & \dfrac{-2x+1}{2\sqrt{x-x^2}} \\ x<-1: & \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x+x^2}} \end{cases}$$

I) $f'(x)=0 \rightarrow \dfrac{-2x+1}{2\sqrt{x-x^2}}=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}\ \text{ق ق}}$ و $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x+x^2}}=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$ غ ق ق

II) $f'(x)=$ ن ت $\rightarrow$ مخرج $=0 \rightarrow 2\sqrt{x+x^2}=0 \rightarrow 2\sqrt{x(x+1)}=0 \rightarrow x=-1,\ x=0$

$\rightarrow 2\sqrt{x-x^2}=0 \rightarrow 2\sqrt{x(x-1)}=0 \rightarrow x=1,\ x=0$

$x=\frac{1}{2} \rightarrow f(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \rightarrow max$

$x=-1 \rightarrow f(-1)=\sqrt{-1+1}=0 \rightarrow min$

$x=0 \rightarrow f(0)=\sqrt{0-0}=0 \rightarrow min$

$x=1 \rightarrow f(1)=\sqrt{1-1}=0 \rightarrow min$

$\rightarrow m=1,\ n=3$

$K=4$

$K+m+n=$

$3+4+1=8$

Senobar

۲) نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق پذیر نباشد.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-2}{2\sqrt{a-2x}}$

$f'(x) =$ تعریف نشده $\rightarrow$ مخرج $= 0 \rightarrow \boxed{x=0}$ و $a-2x=0 \rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a-2x}} \rightarrow \sqrt{a-2x} = 2\sqrt{x} \rightarrow a-2x = 4x \rightarrow \boxed{x = \frac{a}{6}}$

$x=0 \rightarrow f(x) = \sqrt{a}$

$x = \frac{a}{2} \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{a}{2}} \rightarrow \min$

$x = \frac{a}{6} \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{3}} \rightarrow \max$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{2}}\, a \left(\sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{3}}\right) = 12$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{12}} + \sqrt{\frac{a^2}{3}} = 12 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3} + 2\sqrt{\frac{a^4}{36}} = \frac{5a^2}{12} + \frac{2a^2}{6} = \frac{9a^2}{12}$

$\frac{9a^2}{12} = 144 \rightarrow \frac{3a^2}{4} = 144 \rightarrow a^2 = 16 \times 12 \rightarrow a = \pm 8\sqrt{3}$

$[a] = [8\sqrt{3}] = [8 \times 1.7] \simeq [13.6] = 13 \rightarrow$ ۱.

---

۳) نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق پذیر نباشد

$f(x) \Rightarrow \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \Big| _{-2} \frac{x^2(4-x^2)}{x^2-1} \Big| _{2} \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \rightarrow \frac{x^4-4x^2}{x^2-1} \Big| \frac{4x^2-x^4}{x^2-1} \Big| \frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$

$f'(x) \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \Rightarrow \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2} \\ -2 < x < 2 \Rightarrow \frac{(8x-4x^3)(x^2-1) - (2x)(4x^2-x^4)}{(x^2-1)^2} \end{cases}$

$f'(x) =$ تعریف نشده $\rightarrow$ مخرج $= 0 \rightarrow (x^2-1)^2 = 0 \rightarrow ((x-1)(x+1))^2 = 0$

$\rightarrow x = 1 , x = -1$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^5 - 4x^3 - 8x^3 + 8x = 2x^5 - 8x^3$

$\rightarrow 2x^5 - 4x^3 + 8x = 0 \rightarrow 2x(\underbrace{x^4 - 2x^2 + 4}_{\Delta<0}) = 0 \rightarrow x = 0$

نقاط ۲- و ۲ هم زاویه دار هستند ← پس ۵ نقطه

ج)

SUBJECT:

Year: Month: Day:

④ هر نقاط بحرانی ⇐ ① مشتق = ۰ ② مشتق پذیر نباشد

از آنجایی که این مشتق یک تابع درجه ۲ است پس $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

تمامی نقطه‌ها مشتق پذیر است ← پس نقاط باید حالت (مشتق = ۰) را امتحان کنیم

$f'(x)=0 \longrightarrow x=0 \rightarrow c=0$

$\quad \longrightarrow x=1 \rightarrow 3a+2b+\cancel{c}=0 \rightarrow 3a=-2b \rightarrow a=-\frac{2}{3}b$

$f(x) \longrightarrow x=0 \rightarrow d=0$

$\quad \longrightarrow x=1 \rightarrow a+b+\cancel{c}=1 \rightarrow a+b=1 \rightarrow \frac{1}{3}b=1$

$\rightarrow b=3 \;,\; a=-2 \longrightarrow a\times b=-2\times 3=-6$ گ۱

---

⑤ نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق پذیر نباشد.

$f(x) \Rightarrow$

x^3-3x	$-\sqrt{3}$ $3x-x^3$ $+\sqrt{3}$	x^3-3x

$f'(x) \Rightarrow$

$3x^2-3$	$-\sqrt{3}$ $3-3x^2$ $\sqrt{3}$	$3x^2-3$

$\longrightarrow \begin{cases} x\geq\sqrt{3} \,\_\, x\leq-\sqrt{3} \rightarrow 3x^2-3 \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \rightarrow 3-3x^2 \end{cases}$

$f'(x)=0 \longrightarrow 3x^2-3=0 \longrightarrow x=\pm 1$ غ ق ق

$f'(x)=0 \longrightarrow 3-3x^2=0 \longrightarrow \boxed{x=\pm 1 \text{ ق ق}}$

$f'(x) \longrightarrow$ مشتق ندارد $\rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}} \rightarrow$ چون نقطه زاویه‌دار یا ... دارد

$x=\sqrt{3} \longrightarrow y=\sqrt{3}\times 0=0$

$x=-\sqrt{3} \longrightarrow y=-\sqrt{3}\times 0=0$

$x=1 \longrightarrow y=1\times 2=2 \rightarrow max$

$x=-1 \longrightarrow y=-1\times 2=-2 \longrightarrow min \longrightarrow \boxed{y=-2}$ گ۲

Senobar

۶

$$f(x) \Rightarrow \begin{cases} x>0 \rightarrow x^3+3ax^2+b \\ x<0 \rightarrow -x^3+3ax^2+b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} x>0 \rightarrow 3x^2+6ax \\ x<0 \rightarrow -3x^2+6ax \end{cases}$$

* نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق ناپذیر ← $x=0$ در این مشتق پذیر است!

$$f'(x)=0 \xrightarrow{x>0} 3x^2+6ax=0 \rightarrow x(3x+6a)=0 \rightarrow x=0 \text{ یا } x=-2a$$

$$\xrightarrow{x<0} -3x^2+6ax=0 \rightarrow x(-3x+6a)=0 \rightarrow x=0 \text{ یا } x=2a$$

$$\xrightarrow{x<0} x=-1 \rightarrow 2a=-1 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=-1 \Rightarrow 1+3a+b=1 \rightarrow -\frac{3}{2}+b=0 \rightarrow a=\frac{3}{2} \rightarrow ۲$$

---

۷ * نقاط بحرانی ← ① مشتق = ۰ ② مشتق ناپذیر باشد.

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{a}{6} \rightarrow f'(x)=3x+1 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}}$$

$$g(x)=\frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)} \rightarrow \text{مجانب افقی} \Rightarrow \frac{a}{a+1}=y \text{ و مجانب قائم} \Rightarrow \frac{1-a}{a+1}=x$$

$$\Rightarrow \text{نقطه برخورد} = \left(\frac{1-a}{a+1}, \frac{a}{a+1}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{a}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1-a}{a+1}=-\frac{1}{3} \rightarrow -a-1=3-3a \rightarrow 2a=4 \rightarrow a=2$$

$$g(x)=\frac{2x+3}{3x+1} \xrightarrow{y=0} \frac{2x+3}{3x+1}=0 \rightarrow x=-\frac{3}{2} \rightarrow ۴$$

۸

$$y=\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1} \xrightarrow{(-\frac{1}{2}, 3)} x=-\frac{1}{2}, \; y=3$$

$$\frac{b}{4}=y \rightarrow \frac{b}{4}=3 \rightarrow b=12$$

$$4\times\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{a}{2}+1=0 \rightarrow \frac{a}{2}=2 \rightarrow a=4$$

$$\rightarrow \frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3 \rightarrow ۴$$

۹

$$y' = \frac{(4x^3)(x^3-8) - (3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2} = \frac{4x^6 - 32x^3 - 3x^6}{(x^3-8)^2}$$

$$= \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3-8)^2} = \frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2} \rightarrow$$

		۰		~~۲~~		$\sqrt[3]{32}$	
y'	+	۰	−		−	۰	+
y	↗ صعودی	max	↘ نزولی		↘ نزولی	min	↗ صعودی

چون در بازه $[\sqrt[3]{32}$ و $2)$ یا $(2$ و $0]$ نزولی اکیداست پس طول min $= \sqrt[3]{32}$

$\rightarrow$ 2. $\rightarrow x = \sqrt[3]{32} \rightarrow \frac{32\sqrt[3]{32}}{24} = y = \frac{8\sqrt[3]{4}}{3}$

۱۰

$$y' \rightarrow \frac{(4x^3)(x^2-3) - (2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{4x^5 - 12x^3 - 2x^5 + 6x}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{2x^5 - 12x^3 + 6x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x(x^4 - 6x^2 + 3)}{(x^2-3)^2} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=0 \text{ و } x = \pm\sqrt{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{+6 \pm \sqrt{24}}{2}}$$

		$-\sqrt{3+\sqrt{6}}$		~~$-\sqrt{3}$~~		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		۰		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		~~$\sqrt{3}$~~		$+\sqrt{3+\sqrt{6}}$	
y'	−	۰	+		+	۰	−	۰	+	۰	−		−	۰	+
y	↘ نزولی		↗ صعودی		↗ صعودی		↘ نزولی		↗ صعودی		↘ نزولی		↘ نزولی		↗ صعودی

ج ← ۴ بازه