۱) شکل تقریبی تابع:

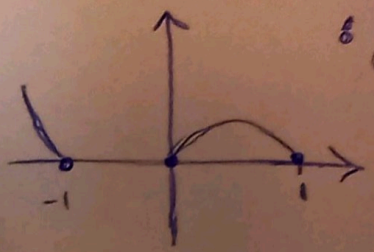
$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$

$x\geq 0 \rightarrow \sqrt{x-x^2}$ $\quad x(1-x)$

	0	1	
	+	0	−

$x<0 \rightarrow \sqrt{x+x^2}$ $\quad x(1+x)$

	−1	0	
	+	0	−



$m=1 \quad n=0 \quad K=2 \Rightarrow m+n+K=3$

۲) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x} \quad D_f=[0,\frac{a}{2}]$

$[2]=1$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a-2x}}=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{a-2x} \Rightarrow x=\frac{a}{6}$

$\Rightarrow f(0)=\sqrt{a} \quad f(\frac{a}{2})=\underbrace{\sqrt{\frac{a}{2}}}_{max} \quad f(\frac{a}{6})=\underbrace{\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}=\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{6}}}_{min} \quad \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}=\sqrt{12} \rightarrow a=12$

۳) نقاط $x=\pm 2$ نقاط گوشه‌ای و همواره اکسترمم نیستن.

$\frac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|$

	-2		2	
$\frac{x^2}{x^2-1}$	+	+	+	+
$\frac{x^2-4}{x^2-1}$	+	0	−	+
$\frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$	+	0	−	0

دارای ۳ نقطه‌ی بحرانی هستن $\Rightarrow$

$f'(x)=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=0$

$4x^5-4x^3-8x^3+8x-2x^5+8x^3=0$

$2x(\underbrace{x^4-2x^2+4}_{\text{ریشه ندارد}})=0 \Rightarrow x=0$

مشتق اصفر می‌شه

۴) $y=ax^3+bx^2+cx+d$

۱۴

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(۱) → از صفر مشتق می‌گیرد → دو نقطه ضابطه یکی دارند $\Rightarrow A(0,0) \Rightarrow d=0$ $\quad B(1,1) \Rightarrow a+b+c+d=1 \Rightarrow a+b+c=1$

(۲) → مشتق صفر است → دارای دو طول یکی است $\quad y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$x=0 \rightarrow c=0$

$x=1 \rightarrow 3a+b=0$

$$\begin{array}{r} a+b=1 \\ 3a+b=0 \\ \hline -2a=1 \end{array} \rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$ab = \frac{-3}{4}$$

۱۵

$f(x) = x|3-x^2| \rightarrow x \in [-1, 0, \sqrt{3}]$

$f(-\frac{3}{2}) = \frac{-3}{2} \times |3 - \frac{9}{4}| = \frac{-3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{-9}{8}$

$f(\sqrt{3}) = 0 \qquad f(1) = 2$

x	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$
x	$-$	$+$	$+$
$x=1$	$-$	$+$	$+$
$x(x^2-3)$	$-$	$+$	$-$

$x^3 - 3x$

$3x^2 - 3 = 0 \quad x = 1$

x

$\min_{\text{مطلق}} = \frac{-9}{8}$

۱۶

$A(-1,1) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 + 3a + b = 1 \rightarrow 3a + b = 0$

$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = -3$

مشتق ← $-x^3 + 3ax^2 + b \xrightarrow{y'} -3x^2 + 6ax \rightarrow -3 - 6a = 0 \quad a = \frac{-1}{2}, b = \frac{3}{2}$

۱۷

$y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{4}$

$y' = 3x + 1 \qquad 3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$x = \frac{-1}{3}$ طول قسمی است که سهمی گون است پس در دامنه قرار دارد.

$(a+)\ -\frac{1}{3} + a - 1 \Rightarrow -\frac{a}{3} - \frac{1}{3} + a - 1 = 0$

$\frac{2a}{3} - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow a = 2 \Rightarrow y = \frac{2x+3}{3x+1}$

x	$-\frac{1}{3}$	
	$-$	$+$
	↓	

جایی که تابع هموگرافیک محور xها را قطع می‌کند $y=0$ است. $\Leftarrow 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-3}{2}$

۸) $x=-\frac{1}{2}$ مجانب قائم است ← نقطه‌ای که در دامنه قرار ندارد.

$y=2$ مجانب افقی است ← در تابع به $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}=\frac{b}{4}=3 \qquad b=12$$

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=4x^2+4x+1 \longrightarrow a=4$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$$

---

۹)

$$f(x)=\frac{x^4}{7-x^3} \rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(7-x^3)-(-3x^2)(x^4)}{(7-x^3)^2}=\frac{28x^3-x^6}{(7-x^3)^2}=\frac{x^3(28-x^3)}{(7-x^3)^2}$$

	+	0	2	$3\sqrt[3]{4}$
	+	−	−	+

$$\min_{\text{بازه}}=2\sqrt[3]{4}-2=2\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$$

---

۱۰) $x\neq 0$ بازه

$$f(x)=\frac{x^3-3}{x^2-x} \qquad f'(x)=\frac{(3x^2-4)(x^2-x)-(2x-1)(x^3-3)}{(x^2-x)^2}=\frac{2x^4+3x^3-4x^2+6x-3}{(x^2-x)^2}$$

$$\frac{2x^4+3x^3-4x^2+6x-3}{(x^2-x)^2}=\frac{(x^2-3)(2x^2-x+1)}{(x^2-x)^2}$$

	+		−		−		+		+
	+		−		+		−		+
$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		-1	0	1	$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$