تمرین

۱۴/۵

①

$f(x) = \cos^{۳}(۲x) + ax^{۲} + b \qquad \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{f(x)}{x} = ۰ \qquad \lim_{x \to ۰^{-}} \frac{f'(x)}{x} = ۲ \qquad a+b = ?$ ۶ ✓

$f' = (-۲\sin ۲x) \times ۳ \times \cos^{۲} ۲x + ۲ax \qquad \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{f}{x} = ۰ \to f(۰^{+}) = ۰ \to ۱ + b = ۰ \to b = -۱$

$f' = -۳\sin ۴x \cos ۲x + ۲ax$

$f'' = -۱۲\cos ۴x \cos ۲x + ۶\sin ۴x \sin ۲x + ۲a \qquad \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{f'}{x} = ۲ \xrightarrow{hop} \lim_{x \to ۰^{+}} f'' = ۲$ ②

$\xrightarrow{x = ۰^{+}} -۱۲ + ۲a = ۲ \to a = ۷$

②

$y = x^{۲} - ۱$ تلاقی در ۲ نقطه

$d: \ y = d$ → مماس های در نقاط برهم عمودند → مجموع عرض ها ?

$x^{۲} - ۱ = d \to x^{۲} = d + ۱ \to x = \sqrt{d+۱}, \quad x = -\sqrt{d+۱}$ ②

$y' = ۲x \to y' = ۲\sqrt{d+۱}, \quad y' = -۲\sqrt{d+۱} \qquad m = \frac{-۱}{m'} \to ۲\sqrt{d+۱} = \frac{۱}{۲\sqrt{d+۱}} \to ۴(d+۱) = ۱ \to d + ۱ = \frac{۱}{۴} \to d = \frac{-۳}{۴}$

مجموع عرض ها : $۲\left(\frac{-۳}{۴}\right) = \frac{-۳}{۲}$ ✓

③ $f = \frac{a}{۲x-۱}$ → خط مماس از → $f(۵) = ?$

$\left(\frac{۵}{۲}, ۶\right), \left(\frac{-۱}{۲}, -۱۲\right)$

عبور می کند

$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{-۱۲ - ۶}{\frac{-۱}{۲} - \frac{۵}{۲}} = \frac{-۱۸}{-۳} = ۶ \to g(x) = ۶x + b \xrightarrow[y = ۶]{x = \frac{۵}{۲}} ۶ = ۱۵ + b \to b = -۹ \to g(x) = ۶x -$

$f' = \frac{-۲a}{(۲x-۱)^{۲}} = ۶ \to \frac{a}{(۲x-۱)^{۲}} = -۳ \to a = -۳(۲x-۱)^{۲}$

$f = g \to \frac{a}{۲x-۱} = ۶x - ۹ \to ۳(۲x-۳)(۲x-۱) = a$

$\cancel{۳}(۲x-۳)\cancel{(۲x-۱)} = -\cancel{۳}\cancel{(۲x-۱)}(۲x-$

$۲x - ۳ = -۲x + ۱ \to ۴x = ۴$

$x = ۱$

$\xrightarrow{x=۱} -۳ = a \to f(x) = \frac{-۳}{۲x-۱} \to f(۵) = \frac{-۳}{۹} = \frac{-۱}{۳}$ ✓

②

s.a.m

③

$y = 2x + b$ ، $y = \frac{x+a}{ax+1}$ این دو خط در نقطه ای به طول ۱ بر هم مماس اند ، $a-b=?$

$x=1$

$f = g \rightarrow 2(1) + b = \frac{1+a}{a+1} \rightarrow 2 + b = 1 \rightarrow b = -1$ ②

$x=1$

$g' = f' \rightarrow 2 = \frac{ax+1-ax-a^2}{(ax+1)^2} \rightarrow 2 = \frac{1-a^2}{(ax+1)^2} \xrightarrow{x=1} 2 = \frac{1-a^2}{(a+1)^2} \rightarrow \frac{1-a}{1+a} = 2$

$\rightarrow 2 + 2a = 1 - a \rightarrow 3a = -1 \rightarrow a = \frac{-1}{3}$ $\quad a - b = \frac{-1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$ ✓

⑤ $f = \sin + \frac{\cos}{2}$, $g = \frac{3\sin}{2}$ $[0,\pi]$ خط مماس بر f در محل برخورد f و g محور x ها را در چه نقطه ای قطع می کند

$\sin + \frac{\cos}{2} = \frac{3}{2}\sin \rightarrow \frac{\sin}{2} = \frac{\cos}{2} \rightarrow \sin = \cos \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ②

$f' = \cos - \frac{\sin}{2} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} f' = \frac{2\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + b \xrightarrow[y=\frac{3\sqrt{2}}{4}]{x=\frac{\pi}{4}} \frac{12\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16} + b$

$b = \frac{\sqrt{2}(12-\pi)}{16}$

$y = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}}x = \frac{\sqrt{2}\pi - 12\sqrt{2}}{\cancel{16}4} \rightarrow x = \frac{\pi - 12}{4}$ ✓

⑥ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ در نقاط اکسترمم A, B به چند خط مماس موازی AB ②

$f' = 6x^2 - 6x - 12$

$\begin{cases} x = 2 \rightarrow y = -19 \\ x = -1 \rightarrow y = 14 \end{cases}$ $\quad m_{AB} = \frac{14+19}{-1-2} = -11$

$\rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = -11 \rightarrow 6x^2 - 6x - 1 = 0 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow$ ۲ نقطه ✓

⑦ $y = kx^3 + (k+1)x^2$ به ازای چه مقادیر k نقطه عطف منحنی در ربع دوم است

$y' = 3kx^2 + 2kx + 2x \rightarrow y'' = 6kx + 2k + 2 \rightarrow y'' = 0 \rightarrow x = \frac{-2k-2}{6k} \xrightarrow{2U} x < 0$

$\frac{-2k-2}{6k} < 0$ $\quad \begin{array}{c|c|c|c} & 0 & & 1 \\ - & & + & - \end{array}$ $\quad k > 1$ ، $k < 0$ ②

$y = x^2(kx + k + 1) \xrightarrow{x=\frac{-2k-2}{6k}} (\frac{-2k-2}{6k})^2(\frac{-2k-2}{6} + k + 1) > 0 \xrightarrow[y>0]{2U} \frac{-k-1+3k+3}{3} \rightarrow$

$\frac{2k+2}{3} > 0 \rightarrow 2k + 2 > 0 \rightarrow k > -1 \xrightarrow{\text{s.am}} -1 < k < 0$ ، $k > 1 \rightarrow$ صحیح ✓

⑧ $(-1,-4)$

$y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ ← از نقطه عطف منحنی [illegible] خط مماس در نقطه [illegible] $\frac{a}{b} = ?$

۰/۵

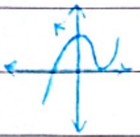
$f(-1) = -4 \rightarrow -1 + a - b - 1 = -4 \rightarrow a - b = -2$

$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{3a} \rightarrow x = \frac{-a}{3} \rightarrow \frac{-a}{3} = -1 \rightarrow \boxed{a = 3}$

$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

$-4 = -1 + 3 - b - 1 \rightarrow \boxed{b = 5}$

⑨ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$



← طول min نسبی ؟

①

$f(0) = 4 \rightarrow c = 4$

$f'(0) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0 \rightarrow b = 0$ $\Big\} \rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + 4$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$

$f(x) = x^3 + ax^2 + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax = 0 \rightarrow x(3x + 2a) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-2a}{3} \end{cases}$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & -\frac{2a}{3} & \\ \hline y' & + & & - & & + \\ \hline y & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & \text{min} & \end{array}$$

$\rightarrow f\left(-\frac{2a}{3}\right) = 0 \rightarrow \left(-\frac{2a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 + 4 = 0$

$\rightarrow \frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0 \rightarrow a^3 = -27 \rightarrow \boxed{a = -3}$

$x = \frac{-2a}{3} \rightarrow x_{min} = \frac{-2(-3)}{3} = 2$

سوال ۱۰

$f'(x) = 4x^3 - 12x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & \\ \hline y' & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ \hline y & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ & & \text{min} & & \text{max} & & \text{min} & \end{array}$$

$A(-\sqrt{3}, -4),\ B(\sqrt{3}, -4) \rightarrow m_{AB} = 0$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \rightarrow 12x^2 = 12 \rightarrow x = \pm 1 \longrightarrow$ نقاط عطف $\rightarrow C(1,0),\ D(-1,0) \rightarrow m_{CD} = 0$

دو خط AB و CD ← موازی اند زاویه بین آنها صفر است